УДК 517.928 https://doi.org/10.33619/2414-2948/99/02

РАВНОМЕРНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНО-ВОЗМУЩЕННОЙ ЗАДАЧИ В ОСОБО КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

©Каримов С., *SPIN-код 1270-7839, д-р физ.-мат. наук, Ошский государственный университет, г. Ош, Кыргызстан, skarimov@oshsu.kg*
©Анарбаева Г. М., *SPIN-код 8406-1289, канд. физ.-мат. наук, Ошский государственный университет, г. Ош, Кыргызстан, ganarbaeva@oshsu.kg*
©Акматов А. А., *SPIN-код 8377-0954, Ошский государственный университет, г. Ош, Кыргызстан, abdilaziz_akmatov@mail.ru*

UNIFORM APPROXIMATION OF THE SOLUTION TO A SINGULARLY PERTURBED PROBLEM IN A PARTICULARLY CRITICAL CASE

©Karimov S., *SPIN-code 1270-7839, Dr. habil., Osh State University, Osh, Kyrgyzstan, skarimov@oshsu.kg*
©Anarbaeva G., *SPIN-code 8406-1289, Ph.D., Osh State University, Osh, Kyrgyzstan, ganarbaeva@oshsu.kg*
©Akmatov A., *SPIN-code 8377-0954, Osh State University, Osh, Kyrgyzstan, abdilaziz_akmatov@mail.ru*

Аннотация. В работе нули собственных значений матрицы лежат в действительной оси. В комплексной плоскости определим область, в которой проводится исследование. В случае смены устойчивости, в точке линии уровня вырождаются и область разделяется на четыре части. Из частей которые соответствуют неустойчивому отрезку, выбираем пути интегрирования. Методы путей интегрирования, которые ранее использовались здесь непригодны. Поэтому разрабатываем новый метод. В итоге получим оценку решения сингулярно возмущенной задачи.

Abstract. In the work, the zeros of the eigenvalues of the matrix lie in the real axis. In the complex plane, we define the area in which the research is being carried out. In the case of a change in stability, at a point the level lines degenerate, and the region is divided into four parts. From the parts that correspond to the unstable segment, we select integration paths. Methods of integration paths that were previously used here are not suitable. Therefore, we are developing a new method. As a result, we obtain an estimate for the solution of the singularly perturbed problem.

Ключевые слова: сингулярное возмущение, начальная точка, линии уровня, затягивания потери устойчивости, путь интегрирования, асимптотика, малый параметр.

Keywords: singular perturbation, starting point, level lines, tightening of loss of stability, integration path, asymptotic, small parameter.

Случаи когда нули собственных значений лежат в комплексной плоскости рассматривались в работах [1, 2]. Если нули собственных значений принадлежат на числовой оси, тогда с помощью ранее используемыми методами [1, 2], мы не сможем исследовать решение сингулярно возмущенной задачи. Поэтому придется заново построить новый метод.

Тип лицензии CC: Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)

Рассмотрим конкретный пример и на основе этого примера построим метод. *Цель исследования:* доказать асимптотическую близость решений сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений и соответствующих невозмущенных уравнений, в случае смены устойчивости на основе конкретного примера.

Материалы и методы исследования

Рассмотрим задачу

$$\varepsilon x'(t,\varepsilon)=a(t)x(t,\varepsilon)+\varepsilon f(t,x) \tag{1}$$

$$x(t_0,\varepsilon)=x^0(\varepsilon),\ \left|x^0(\varepsilon)\right|=O(\varepsilon), \tag{2}$$

где $a(t)=t-1$, $0<\varepsilon$ — малый параметр, $f(t,x(t,\varepsilon))$ — аналитическая функция от двух переменных, $t\in T$ — конечный или бесконечный отрезок, $0\le x<\delta$, $\delta-const$. Например, $f(t,x(t,\varepsilon))$ могут оказаться многочленами относительно переменной x с аналитическими коэффициентами на отрезке T.

Невозмущенное уравнение $a(t)\tilde{x}(t,0)=0$ имеет нулевое решение $\tilde{x}(t)=0$.

Собственное значение $a(t)=t-1$ устойчиво при $-\infty<t<1$, неустойчиво при $1<t<+\infty$.

Для решения задачи (1), (2) $x(t,\varepsilon)$ справедливо равенство

$$\lim_{\varepsilon\to 0}x(t,\varepsilon)=\tilde{x}(t), \tag{3}$$

при $t\in(-\infty,1)$.

В данной работе доказывается , что равенство (3) имеет место для значений $t\in(-\infty,2]$, то есть решение задачи (1), (2) задерживается на конечный промежуток времени $t\in[1,2]$. Решение задачи (1), (2) не сразу уходит к бесконечности.

Теперь дифференциальную задачу (1), (2) заменим равносильной интегральной задачей

$$x(t,\varepsilon)=x^0(\varepsilon)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}a(s)ds\right)+\int_{t_0}^{t}f(\tau,x(\tau,\varepsilon))\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^{t}a(s)ds\right)d\tau. \tag{4}$$

Уравнение (4) решим методом последовательных приближений

$x_0(t,\varepsilon)=0$,

$$x_1(t,\varepsilon)=x^0(\varepsilon)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}a(s)ds\right)+\int_{t_0}^{t}f(\tau,0)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^{t}a(s)ds\right)d\tau,$$

$$x_2(t,\varepsilon)=x^0(\varepsilon)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}a(s)ds\right)+\int_{t_0}^{t}f(\tau,x_1(\tau,\varepsilon))\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^{t}a(s)ds\right)d\tau,$$

… … …,

$$x_n(t,\varepsilon)=x^0(\varepsilon)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}a(s)ds\right)+\int_{t_0}^{t}f(\tau,x_{n-1}(\tau,\varepsilon))\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^{t}a(s)ds\right)d\tau,$$

$(n=0,1,2,...)$.

Рассмотрим ряд

Тип лицензии CC: Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[x_n(t,\varepsilon)-x_{n-1}(t,\varepsilon)\right], \tag{5}$$

Пусть $\tilde{x}(t)=0$. Тогда не нарушая общности можно предположить, что $|x(0,\varepsilon)|=|x^0(\varepsilon)|=O(\varepsilon)$.

Далее будем считать, что $t=t_1+it_2$; $\tau=\tau_1+i\tau_2$, где t_1, t_2, τ_1, τ_2 - действительные переменные. Тогда получим

$$\int_{t_0}^{t}a(s)ds=\int_{0}^{t}a(s)ds=\frac{t^2}{2}-t=\frac{1}{2}\left[(t-1)^2-1\right]=\frac{1}{2}\left[(t_1-1)^2-t_2^2-1\right]+it_2(t_1-1),$$

$$u(t_1,t_2)=\mathrm{Re}\int_{0}^{t}a(s)ds=\frac{1}{2}\left[(t_1-1)^2-t_2^2-1\right].$$

Справедлива оценка:

$\left|x^0(\varepsilon)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t a(s)ds\right)\right|=O(\varepsilon)$ только при $u(t_1,t_2)\le 0$. Поэтому будем рассматривать замкнутую область (рисунок 1) $H_0=\{(t_1;t_2):u(t_1,t_2)\le 0\}$.

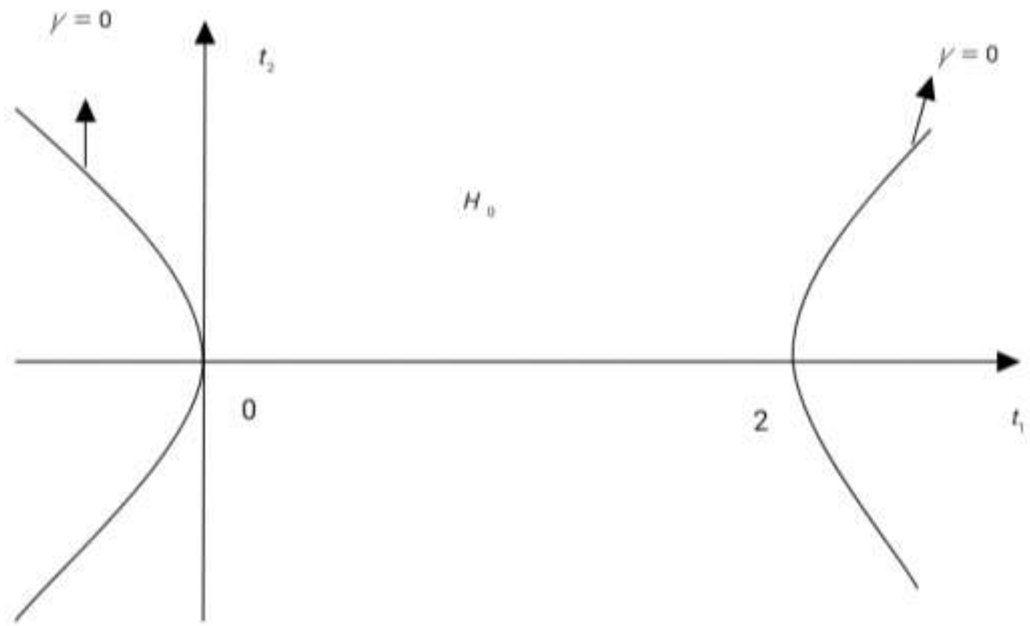

Рисунок 1. Область H_0.

Если $(t_1,t_2)\in H_0$, то $\left|x^0(\varepsilon)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t a(s)ds\right)\right|=O(\varepsilon)$.

Для того, чтобы последовательные приближения были ограниченными величинами необходимо выполнение условие $u(t_1,t_2)-u(\tau_1,\tau_2)\le 0$ то есть пути интегрирования должны быть убывающими от начальной точки до последней точки. Таким образом, пути интегрирования будем выбирать так, чтобы имело место неравенство

$$u(t_1,t_2)\le u(\tau_1,\tau_2), \tag{6}$$

Тип лицензии CC: Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)

от начальной точки до конечной точки (t_1, t_2). Это есть главное требование на выбор путей интегрирования для последовательных приближений. Для всех последовательных приближений пути интегрирования будут неизменными.

Пусть $u(t_1, t_2) = \gamma\left(\left|(t_1-1)^2 - t_2^2 - 1 = 2\gamma\right|\right)$, где γ — действительное число.

Если $\gamma > 0$, то гипербола будет расположена правее от особой критической линии $u(t_1, t_2) = 0$. Если $-1 < \gamma < 0$, то гипербола будет расположена левее от особой критической линии $u(t_1, t_2) = 0$. Если $\gamma = -1$ то гипербола вырождается на прямые $t_2 = \pm(t_1 - 1)$. Если $\gamma < -1$, то гиперболы будет расположены вверх (вниз) между двух прямыми $t_2 = \pm(t_1 - 1)$ (Рисунок 2). Для любой гиперболы $u(t_1, t_2) = \gamma$ прямой $t_2 = t_1 - 1$ или $t_2 = -t_1 + 1$ является асимптотой.

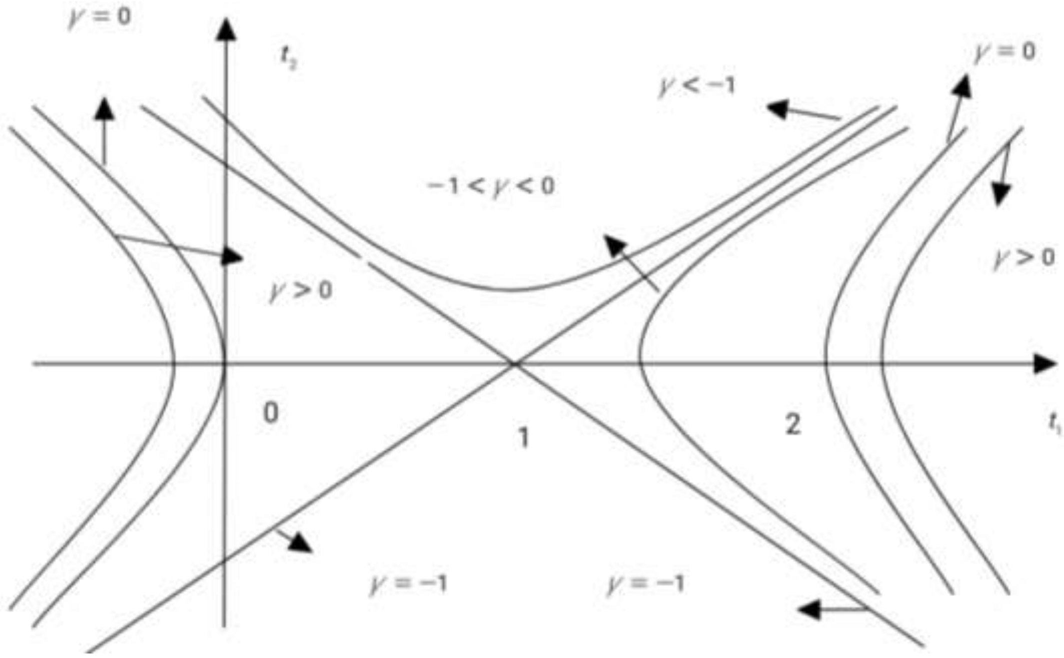

Рисунок 2. Линии уровня в области H_0.

Для нас особый интерес представляют поведения решения на отрезке $1 \le t_1 \le 2$.

H — замкнутая бесконечная область, ограничена с левой стороны полупрямыми $t_2 = \pm\left(t_1 - 1 + \sqrt{\varepsilon}\right)$ $(1 \le t_1 < +\infty)$, с правой стороны полупрямыми $t_2 = \pm(t_1 - 2)$ $(2 \le t_1 < +\infty)$. (Рисунок 3).

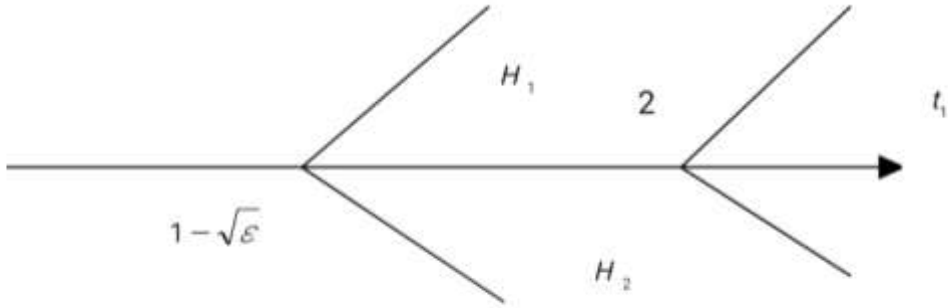

Рисунок 3. Области H_1 и H_2.

Тип лицензии CC: Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)

$H = H_1 \cup H_2$, где $H_1 = \{(t_1,t_2):(t_1,t_2)\in H \, u \, t_2 \geq 0\}$, $H_2 = \{(t_1,t_2):(t_1,t_2)\in H \, u \, t_2 \leq 0\}$, $H_1 \cap H_2 = [1-\sqrt{\varepsilon},2]$; H_1, H_2 — симметрично относительно действительной оси Ot_1 и обе является бесконечными областями.

$$\bar{T} = \{(t_1,t_2):1-\sqrt{\varepsilon} \leq t_1 \leq 1,\ 0 \leq t_2 \leq t_1 - 1 + \sqrt{\varepsilon}\},$$
$$T = \{(t_1,t_2):1-\sqrt{\varepsilon} \leq t_1 < 1,\ 0 \leq t_2 \leq t_1 - 1 + \sqrt{\varepsilon}\},$$
$$H_{10} = H_1 \setminus T = \{(t_1,t_2):(t_1,t_2)\in H_1, u \ t_1 \geq 1\}.$$

Решение задачи будем оценивать в замкнутой области H_1. Если пути интегрирования симметричны то сразу получим оценку решения задачи на H_2 . Таким образом, будем оценивать решение задачи в области H_1 . Сначала определим убывающей путь интегрирование для замкнутой области H_1.

Через Γ обозначим множество точек гиперболы $u(t_1,t_2)=0$ на плоскости, а через Γ_1 обозначим правую половину гиперболы $u(t_1,t_2)=0$: $\Gamma_1 = \Gamma \cap H_1$. Две линии гиперболы $u(t_1,t_2)=0$ и прямой $t_1+t_2=2$ пересекаются в единственной точке $(2,0)$:

$$\begin{cases} u(t_1,t_2)=0 \\ t_1+t_2=2 \end{cases} \text{или} \begin{cases} (t_1-1)^2 - t_2^2 = 1 \\ t_1+t_2=2 \end{cases}.$$

Запишем в виде

$$\begin{cases} (t_1-1)-t_2 = \dfrac{1}{(t_1-1)+t_2} \\ t_1+t_2=2 \end{cases} \text{или} \begin{cases} (t_1-1)-t_2 = 1 \\ t_1+t_2=2 \end{cases}.$$

Отсюда получим единственную точку пересечения двух линий $(2,0)$. По вертикальной прямой точки гиперболы $u(t_1,t_2)=0$ лежат выше (не ниже) чем соответствующие точки прямой $t_1+t_2=2$. Поэтому для точек гиперболы имеет место неравенство $(t_1-1)+t_2 \geq 1$. Таким образом, для точек гиперболы Γ_1 справедливо неравенство: из $(t_1-1)^2 - t_2^2 = 1$ получим $(t_1-1)-t_2 = \dfrac{1}{(t_1-1)+t_2} \leq \dfrac{1}{1} = 1$ или $(t_1-1)-t_2 \leq 1$. Отсюда $t_1 - 2 \leq t_2$.

По вертикальной прямой точки гиперболы Γ_1 лежат выше (не ниже), чем соответствующие точки прямой $t_1 - t_2 = 2$ ($(t_1-1)-t_2=1$); по горизонтальной прямой точки гиперболы Γ_1 лежат левее чем соответствующие точки прямой.

Таким образом, рассмотрим прямую $t_2 = t_1 - 2$, по которой спускается $+\infty$ (плюс бесконечность) до точки (τ_1,τ_2), $\tau_2 = t_2$, $\tau_1 = t_2 + 2$, (t_1,t_2) - конечная точка на области H_1. По прямой $\tau_2 = \tau_1 - 2$ от начальной точки $(2,0)$ до ($\tau_1 = +\infty$, $\tau_2 = \tau_1 - 2 = +\infty$) путь возрастающий. Нам нужен обратный путь. Следовательно, нужный нам путь будет убывающим. Далее от точки $(\tau_1,\tau_2)=(t_1+2,t_2)$ по горизонтальной прямой до точки (t_1,t_2). Это есть последний отрезок пути. $l_3 = \{(\tau_1,\tau_2):\tau_2 = t_2; t_2+2 \geq \tau_1 \geq t_1\}$. Таким образом, пути интегрирования для всех последовательных приближений будут неизменными: $l = l_0 \cup l_1 \cup l_2 \cup l_3$ и $\tilde{l} = l_0 \cup \tilde{l}_1 \cup \tilde{l}_3$ где

$$l_0 = \{(\tau_1,\tau_2):0 \leq \tau_1 \leq 1-\sqrt{\varepsilon}; \tau_2 = 0\},$$
$$l_1 = \{(\tau_1,\tau_2):\tau_2 = \tau_1 - 1 + \sqrt{\varepsilon}, 1-\sqrt{\varepsilon} \leq \tau_1 < +\infty\},$$

Тип лицензии CC: Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)

$\tilde{l}_1 = \{(\tau_1,\tau_2): \tau_2 = \tau_1 - 1 + \sqrt{\varepsilon}, 1 - \sqrt{\varepsilon} \le \tau_1 \le t_2 + 1 - \sqrt{\varepsilon}\}$,
$l_2 = \{(\tau_1,\tau_2): \tau_2 = \tau_1 - 2,\ 2 + t_2 \le \tau_1 < +\infty\}$,
$l_3 = \{(\tau_1,\tau_2): \tau_2 = t_2, t_2 + 2 \ge \tau_1 \ge t_1\}$,
$\tilde{l}_3 = \{(\tau_1,\tau_2): \tau_2 = t_2, t_2 + 1 - \sqrt{\varepsilon} \le \tau_1 \le t_1\}$.

Во всех выше указанных путях интегрирования условие (6) выполняется.

Теперь оценим последовательные приближения на замкнутом множестве H_1.

$$x_1(t,\varepsilon) = x^0(\varepsilon)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t a(s)ds\right) + \int_0^t f(\tau,0)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t a(s)ds\right)d\tau .$$

Здесь $\operatorname{Re}\int_0^t a(s)ds = \frac{1}{2}\left[(t_1-1)^2 - t_2^2 - 1\right] \equiv u(t_1,t_2) \le 0$ при $(t_1,t_2) \in H = H_1 \cup H_2$.

Поэтому

$|A(t,\varepsilon)| = \left|x^0(\varepsilon)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t a(s)ds\right)\right| = O(\varepsilon)$ при $(t_1,t_2) \in H_1$. Остается оценить величины

$$I(t,\varepsilon) = \int_0^t f(\tau,0)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t a(s)ds\right)d\tau .$$

Предположим, что $|f(\tau,0)| = O(1)$ при $(t_1,t_2) \in H_1$.

Если $(t_1,t_2) \in \tilde{T}$ то $\tilde{l} = l_0 \cup \tilde{l}_1 \cup \tilde{l}_3$. Тогда

$|I(t,\varepsilon)| = O(1)\int_{\tilde{l}} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}(u(t_1,t_2) - u(\tau_1,\tau_2))\right)|d\tau|$, где $\tilde{l} = l_0 \cup \tilde{l}_1 \cup \tilde{l}_3$:

$l_0 = \{(\tau_1,\tau_2): 0 \le \tau_1 \le 1 - \sqrt{\varepsilon}, \tau_2 = 0\}$,
$\tilde{l}_1 = \{(\tau_1,\tau_2): \tau_2 = \tau_1 - 1 + \sqrt{\varepsilon}, 1 - \sqrt{\varepsilon} \le \tau_1 \le t_2 + 1 - \sqrt{\varepsilon}\}$,
$\tilde{l}_3 = \{(\tau_1,\tau_2): \tau_2 = t_2, t_2 + 1 - \sqrt{\varepsilon} \le \tau_1 \le t_1\}$.

1). Будем оценивать величины

$$\int_{l_0} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}(u(t_1,t_2) - u(\tau_1,\tau_2))\right)\cdot|d\tau| .$$

Пусть $l_0 = \{(\tau_1,\tau_2): 0 \le \tau_1 \le 1 - \sqrt{\varepsilon}, \tau_2 = 0\}$.

Тогда

$$u(t_1,t_2) - u(\tau_1,\tau_2) = \frac{1}{2}\left[(t_1-1)^2 - (\tau_1-1)^2\right] = \frac{1}{2}\left[(t_1-\tau_1)(t_1+\tau_1-2)\right] \le \frac{1}{2}\left[(2t_1-2)(t_1-\tau_1)\right] \le$$

$\le -\sqrt{\varepsilon}(t_1-\tau_1) = \sqrt{\varepsilon}(\tau_1 - t_1)$. Таким образом

$$\int_{l_0} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}(u(t_1,t_2) - u(\tau_1,\tau_2))\right)|d\tau| \le \int_0^{t_1} \exp\left(\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\varepsilon}(\tau_1 - t_1)\right)d\tau_1 = \sqrt{\varepsilon}\exp\left(\frac{(\tau_1 - t_1)}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\Bigg|_0^{t_1} =$$

$$= \sqrt{\varepsilon}\left[1 - \exp\left(-\frac{t_1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\right] = O(\sqrt{\varepsilon}) .$$

Получена окончательная оценка

$$\int_{l_0} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\left(u(t_1,t_2)-u(\tau_1,\tau_2)\right)\right)\cdot|d\tau| = O(\sqrt{\varepsilon}).$$

2). Рассмотрим интеграл

$$\int_{\tilde{l}_1} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\left(u(t_1,t_2)-u(\tau_1,\tau_2)\right)\right)\cdot|d\tau|.$$

Здесь $\tilde{l}_1 = \left\{(\tau_1,\tau_2):\tau_2 = \tau_1 - 1 + \sqrt{\varepsilon}, 1-\sqrt{\varepsilon} \le \tau_1 \le t_2 + 1 - \sqrt{\varepsilon}\right\}$.

$$-u(\tau_1,\tau_2) = -\frac{1}{2}\left[(\tau_1-1)^2 - \tau_2^2 - 1\right] = \frac{1}{2}\left[2(\tau_1-1)\sqrt{\varepsilon}+\varepsilon+1\right].$$

$$\int_{\tilde{l}_1} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\left(u(t_1,t_2)-u(\tau_1,\tau_2)\right)\right)\cdot|d\tau| = \sqrt{2}\exp\left(\frac{u(t_1,t_2)}{\varepsilon}\right)\cdot$$

$$\cdot \int_{1-\sqrt{\varepsilon}}^{t_2+1-\sqrt{\varepsilon}} \exp\left(\frac{2\sqrt{\varepsilon}(\tau_1-1)+\varepsilon+1}{2\varepsilon}\right)\cdot d\tau_1 .$$

Таким образом, получим оценку

$$\int_{\tilde{l}_1} \exp\left(\frac{u(t_1,t_2)-u(\tau_1,\tau_2)}{\varepsilon}\right)|d\tau| = O(\sqrt{\varepsilon}).$$

3). Остается вычислить интеграл

$$\int_{\tilde{l}_3} \exp\left(\frac{u(t_1,t_2)-u(\tau_1,\tau_2)}{\varepsilon}\right)\cdot|d\tau|.$$

Здесь

$\tilde{l}_3 = \left\{(\tau_1,\tau_2):\tau_2 = t_2, t_2+1-\sqrt{\varepsilon} \le \tau_1 \le t_1\right\}$,

$$\int_{\tilde{l}_3} \exp\left(\frac{u(t_1,t_2)-u(\tau_1,\tau_2)}{\varepsilon}\right)|d\tau| = O(1)\int_{t_1}^{1} \exp\left(-\frac{(\tau_1-1)^2}{\varepsilon}\right)\cdot|d\tau_1|.$$

Пусть $\dfrac{\tau_1-1}{\sqrt{2\varepsilon}} = s$, тогда

$\tau_1 = 1+\sqrt{2\varepsilon}s$, $d\tau_1 = \sqrt{2\varepsilon}ds$, $\tau_1 = t_2+1-\sqrt{\varepsilon}$, $s_1 = \dfrac{t_2-\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{2\varepsilon}} < 0$, $\tau_1 = t_1$ $s_2 = \dfrac{t_1-1}{\sqrt{2\varepsilon}} < 0$ и

$s_1 < s_2$, $-s = \eta$, $s = -\eta$, $ds = -d\eta$, $\eta_1 = -s_1$. $\eta_2 = -s_2$. Тогда

$$|I(t_1,t_2,\varepsilon)| = O(1)\int_{t_2}^{t_1} \exp\left(-\frac{(\tau_1-1)^2}{2\varepsilon}\right)d\tau_1 = \sqrt{2\varepsilon}O(1)\int_{s_1}^{s_2}\exp\left(-s^2\right)ds =$$

$$= -\sqrt{2\varepsilon}O(1)\int_{\eta_1}^{\eta_2}\exp\left(-s^2\right)ds \le \sqrt{2\varepsilon}O(1)\int_{0}^{+\infty}\exp\left(-\eta^2\right)d\eta .$$

Учтено интеграл Пуассона и получена оценка

$$\int_{\tilde{l}_3} \exp\left(\frac{u(t_1,t_2)-u(\tau_1,\tau_2)}{\varepsilon}\right)\cdot|d\tau| = O(\sqrt{\varepsilon}).$$

Если $(t_1,t_2) \in H_{10}$ то $l = l_0 \cup l_1 \cup l_2 \cup l_3$. Тогда

Тип лицензии CC: Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)

Т. 10. №2. 2024
https://doi.org/10.33619/2414-2948/99

$$|I(t,\varepsilon)| = O(1)\int_{\tilde{l}} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}(u(t_1,t_2)-u(\tau_1,\tau_2))\right)|d\tau|,$$ где $l = l_0 \cup l_1 \cup l_2 \cup l_3$.

1). Выше, оценка по пути интегрирования l_0 получена.

2). Рассмотрим интеграл

$$\int_{l_1} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}(u(t_1,t_2)-u(\tau_1,\tau_2))\right)\cdot|d\tau|.$$

Здесь $l_1 = \{(\tau_1,\tau_2): 1-\sqrt{\varepsilon} \le \tau_1 < +\infty, \tau_2 = \tau_1 - 1 + \sqrt{\varepsilon}\}$.

$$-u(\tau_1,\tau_2) = \frac{1}{2}\left[-(\tau_1-1)^2 + \tau_2^2 + 1\right] = \frac{1}{2}\left[2(\tau_1-1)\sqrt{\varepsilon} + \varepsilon + 1\right].$$

Пусть $b - const$, $1-\sqrt{\varepsilon} < b < +\infty$. Тогда

$$\int_{l_1} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}(u(t_1,t_2)-u(\tau_1,\tau_2))\right)\cdot|d\tau| = \sqrt{2}\int_{1-\sqrt{\varepsilon}}^{b} \exp\left(\frac{u(t_1,t_2)-u(\tau_1,\tau_2)}{\varepsilon}\right)d\tau_1 =$$

$$= \sqrt{2}\int_{1-\sqrt{\varepsilon}}^{b} \exp\left(\frac{2\sqrt{\varepsilon}(\tau_1-1)+\varepsilon+1}{2\varepsilon}\right)\cdot d\tau_1.$$

Здесь оценка от величины b не зависит. Таким образом, получим оценку

$$\int_{l_1} \exp\left(\frac{u(t_1,t_2)-u(\tau_1,\tau_2)}{\varepsilon}\right)|d\tau| = O(\sqrt{\varepsilon}).$$

3). Теперь вычислим интеграл $\int_{l_2} \exp\left(\frac{u(t_1,t_2)-u(\tau_1,\tau_2)}{\varepsilon}\right)\cdot|d\tau|$ где

$l_2 = \{(t_1,t_2): +\infty > \tau_1 \ge 2 + t_2, \tau_2 = \tau_1 - 2\}$,

$$u(\tau_1,\tau_2) = \frac{1}{2}\left[(\tau_1-1)^2 - \tau_2^2 - 1\right] = \frac{1}{2}\left[(\tau_1-1)^2 - (\tau_1-2)^2 - 1\right] = \tau_1 - 2.$$

Пусть $\infty > b > 0$, $b - const$. Рассмотрим интеграл $\int_{b}^{t_2+2} \exp\left(\frac{u(t_1,t_2)-u(\tau_1,\tau_2)}{\varepsilon}\right)\cdot|d\tau|$. Здесь $\tau_2 = \tau_1 - 2$, $d\tau_2 = d\tau_1$, $|d\tau| = \sqrt{2}d\tau_1$, $u(\tau_1,\tau_2) = \tau_1 - 2$.

Поэтому

$$\int_{b}^{t_2+2} \exp\left(\frac{u(t_1,t_2)-u(\tau_1,\tau_2)}{\varepsilon}\right)\cdot|d\tau| = \sqrt{2}\exp\left(\frac{u(t_1,t_2)}{\varepsilon}\right)\int_{b}^{t_2+2} \exp\left(\frac{2-\tau_1}{2\varepsilon}\right)d\tau_1.$$

Таким образом, получена оценка

$$\int_{l_2} \exp\left(\frac{u(t_1,t_2)-u(\tau_1,\tau_2)}{\varepsilon}\right)\cdot|d\tau| = O(\varepsilon).$$

Остается вычислить интеграл

$$\int_{l_3} \exp\left(\frac{u(t_1,t_2)-u(\tau_1,\tau_2)}{\varepsilon}\right)\cdot|d\tau|.$$

Здесь

$l_3 = \{(\tau_1,\tau_2 : \tau_2 = t_2, t_2 + 2 \ge \tau_1 \ge t_1)\}$,

$$u(t_1,t_2) - u(\tau_1,\tau_2) = \frac{1}{2}\left[(t_1-1)^2 - (\tau_1-1)^2\right] \le -(t_1-1)(\tau_1-t_1).$$

Тип лицензии CC: Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)

Т. 10. №2. 2024
https://doi.org/10.33619/2414-2948/99

Получен следующий интеграл

$$\int_{l_3} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}(u(t_1,t_2)-u(\tau_1,\tau_2))\right)\cdot|d\tau| \le \int_{l_3} \exp\left(-\frac{(t_1-1)(\tau_1-t_1)}{\varepsilon}\right)\cdot d\tau_1 .$$

Рассмотрим два случая:

1). Пусть $\sqrt{\varepsilon} \le t_1 - 1$. Тогда при $t-1=\sqrt{\varepsilon}$, получим

$$\int_{l_3} \exp\left(\frac{u(t_1,t_2)-u(\tau_1,\tau_2)}{\varepsilon}\right)\cdot|d\tau| \le \int_{t_2+2}^{t_1} \exp\left(-\frac{(t_1-1)(\tau_1-t_1)}{\varepsilon}\right)\cdot|d\tau_1| =$$

$$= \frac{\varepsilon}{t_1-1}\left[\exp\left(-\frac{(t_1-1)(t_2-t_1+2)}{\varepsilon}\right)\right] = O\left(\sqrt{\varepsilon}\right).$$

Или при $t_1-1>\sqrt{\varepsilon}$:

$$\int_{l_3} \exp\left(\frac{u(t_1,t_2)-u(\tau_1,\tau_2)}{\varepsilon}\right)\cdot|d\tau| \le \int_{t_2+2}^{t_1} \exp\left(-\frac{(t_1-1)(\tau_1-t_1)}{\varepsilon}\right)\cdot|d\tau_1| =$$

$$= \frac{\varepsilon}{t_1-1}\left[\exp\left(-\frac{(t_1-1)(t_2-t_1+2)}{\varepsilon}\right)\right] = O(\varepsilon).$$

2). Случай $1 \le t_1 \le 1+\sqrt{\varepsilon}$. Тогда будем иметь

$$\int_{l_3} \exp\left(\frac{u(t_1,t_2)-u(\tau_1,\tau_2)}{\varepsilon}\right)|d\tau| = O(1)\int_{t_2+2}^{t_1} \exp\left(-\frac{(\tau_1-1)^2}{\varepsilon}\right)\cdot|d\tau_1| =$$

$$= O(1)\int_{t_1}^{t_2+2} \exp\left(-\frac{(\tau_1-1)^2}{\varepsilon}\right)d\tau_1 .$$

Учтено, интеграл Пуассона и получено оценка

$$\int_{l_3} \exp\left(\frac{u(t_1,t_2)-u(\tau_1,\tau_2)}{\varepsilon}\right)\cdot|d\tau| = O(\sqrt{\varepsilon}).$$

Теперь при любом $(t_1,t_2)\in H_1$, где $H_1 = H_{10}\cup\tilde{T}$, пути интегрирования будут такими как величина $u(t_1,t_2)$ будет убывающими от точки $\left(t_1-\sqrt{\varepsilon},0\right)$ до точки $(t_1,t_2)\in H_1$. Если $(t_1,t_2)\in H_1$, то $|x_1(t,\varepsilon)| = O\left(\sqrt{\varepsilon}\right)$, причем эта оценка не улучшаемая.

Для первого приближения $x_1(t,\varepsilon)$ справедлива оценка $|x_1(t,\varepsilon)| = O(\sqrt{\varepsilon})$ при $(t_1,t_2)\in H_1$.

Таким образом, имеет место оценка, если $(t_1,t_2)\in H_1$, то

$$|x_1(t,\varepsilon)| \le C\sqrt{\varepsilon}, \tag{7}$$

где $0<c-const$.

Таким образом, оценка (8) имеет место для всех точек замкнутой области H_1. Аналогично для области H_2 имеет место оценка (8).

Теперь рассмотрим сходимости последовательных приближений . Если $(t_1,t_2)\in H$, то справедлива оценка

$$|x_1(t,\varepsilon)| \le C\sqrt{\varepsilon},\ 0<c-const. \tag{8}$$

Тип лицензии CC: Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)

Т. 10. №2. 2024
https://doi.org/10.33619/2414-2948/99

В дальнейшем, положительные постоянные величины, которые в рассуждениях существенной роли не играют, и поэтому обозначим одной той же буквой C.

$$x_2(t,\varepsilon)-x_1(t,\varepsilon)=\int_l\left[f(\tau,x_1(\tau,\varepsilon))-f(\tau,0)\right]\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t a(s)ds\right)d\tau .$$

Пусть

$$\left|f(t,x)-f(t,\tilde{x})\right|\le\beta\left|x-\tilde{x}\right|,\text{ где }0<\beta-const . \tag{9}$$

Тогда $\left|x_2(t,\varepsilon)-x_1(t,\varepsilon)\right|\le\beta\int_l\left|x_1(t,\varepsilon)\right|\exp\left(\frac{u(t_1,t_2)-u(\tau_1,\tau_2)}{\varepsilon}\right)\cdot\left|d\tau\right|\le$

$\le\beta C\sqrt{\varepsilon}\int_l\exp\left(\frac{u(t_1,t_2)-u(\tau_1,\tau_2)}{\varepsilon}\right)\cdot\left|d\tau\right|\le\left(C\sqrt{\varepsilon}\right)^2$;

$$\left|x_2(t,\varepsilon)-x_1(t,\varepsilon)\right|\le\left(C\sqrt{\varepsilon}\right)^2 . \tag{10}$$

В далее, имеет места оценка $\left|x_n(t,\varepsilon)-x_{n-1}(t,\varepsilon)\right|\le\left(C\sqrt{\varepsilon}\right)^n$, $(n=1,2,...)$.

Имеет места следующая теорема.

Теорема. На замкнутой области H_1 задача (1),(2) имеет единственное решение $x(t,\varepsilon)$, представимое в виде $x(t,\varepsilon)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[x_n(t,\varepsilon)-x_{n-1}(t,\varepsilon)\right]$ и на H_1 справедлива оценка

$\left|x_n(t,\varepsilon)-x_{n-1}(t,\varepsilon)\right|\le\left(C\sqrt{\varepsilon}\right)^n,(n=1,2,...)$ где $0<c-const$.

Результаты и обсуждения

Если нули собственных значений матрицы лежат в действительной оси, тогда случае смены устойчивости в точке линии уровня вырождаются, и область разделяется на четыре части. В трех из них не содержится неустойчивый отрезок $t\in[1,2]$. Последняя часть области содержит этот отрезок. Трудность заключается в том, что переходить ту части область на конечном отрезке по убывающему пути интегрирования невозможно. Точнее, не существуют линии уровня соединяющую начальную и последнюю точку. Поэтому мы вынуждены разрабатывать новый метод для выбора пути интегрирования.

Вывод

Случаи, когда нули собственных значений лежат в действительной оси раньше не рассматривались. В работе доказано, что в этом случае тоже выполняется явление затягивания потери устойчивости.

Список литературы:

1. Алыбаев К. С. Метод линии уровня исследования сингулярно-возмущенных уравнений при нарушении условия устойчивости: дисс. … д-ра физ.-мат. наук. Джалал-Абад, 2001. С. 1-376.

2. Каримов С. Равномерное приближение решения сингулярно возмущенной задачи в особо критическом случае. Ош, 2019. С. 1-192.

Тип лицензии CC: Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)

References:

1. Alybaev, K. S. (2001). Metod linii urovnya issledovaniya singulyarno-vozmushchennykh uravnenii pri narushenii usloviya ustoichivosti: diss. … d-ra fiz.-mat. nauk. Dzhalal-Abad, 1-376. (in Russian).

2. Karimov, S. (2019). Ravnomernoe priblizhenie resheniya singulyarno vozmushchennoi zadachi v osobo kriticheskom sluchae. Osh, 1-192. (in Russian).

Работа поступила в редакцию 19.01.2024 г.

Принята к публикации 24.01.2024 г.

Ссылка для цитирования:

Каримов С., Анарбаева Г. М., Акматов А. А. Равномерное приближение решения сингулярно-возмущенной задачи в особо критическом случае // Бюллетень науки и практики. 2024. Т. 10. №2. С. 22-32. https://doi.org/10.33619/2414-2948/99/02

Cite as (APA):

Karimov, S., Anarbaeva, G., & Akmatov, A. (2024). Uniform Approximation of the Solution to a Singularly Perturbed Problem in a Particularly Critical Case. *Bulletin of Science and Practice, 10*(2), 22-32. (in Russian). https://doi.org/10.33619/2414-2948/99/02

Тип лицензии CC: Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)