УДК 517.928 https://doi.org/10.33619/2414-2948/99/01

ИССЛЕДОВАНИЯ РЕШЕНИЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

©***Каримов С.,*** *SPIN-код 1270-7839, д-р физ.-мат. наук, Ошский государственный университет, г. Ош, Кыргызстан, skarimov@oshsu.kg*
©***Акматов А. А.,*** *SPIN-код 8377-0954, Ошский государственный университет, г. Ош, Кыргызстан, abdilaziz_akmatov@mail.ru*

INVESTIGATIONS OF SOLUTIONS OF SINGULARLY PERTURBED DIFFERENTIAL EQUATIONS

©***Karimov S.,*** *SPIN-code 1270-7839, Dr. habil., Osh State University, Osh, Kyrgyzstan, skarimov@oshsu.kg*
©***Akmatov A.,*** *SPIN-code 8377-0954, Osh State University, Osh, Kyrgyzstan, abdilaziz_akmatov@mail.ru*.

Аннотация. Используя основное понятие проективной геометрии о пересечении параллельных прямых мы разработали новый способ выбора путей интегрирования. Пути интегрирования должны быть убывающими от начальной точки до последней точки. Это условие сохранилось. Чтобы проверить правильность рассмотрим классический пример. Преимущества способа заключаются в том, что способ применим, когда значения собственных значений матрицы действительны. Особенности действительных собственных значений матрицы заключаются в том, что в этом случае линии уровня вырождаются в точке смены устойчивости. В результате рассматриваемая область разделяется на несколько частей. Проводя вычисления по выбранным путям интегрирования получим асимптотические оценки решений сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений.

Abstract. Using the basic concept of projective geometry about the intersection of parallel lines, we have developed a new method for choosing integration paths. The integration paths must be decreasing from the starting point to the last point. This condition has remained. To check the correctness, consider a classic example. The advantages of the method are that the method is applicable when the eigenvalues of the matrix are real. The peculiarities of the real eigenvalues of the matrix are that in this case the level lines degenerate at the point of stability change. As a result, the area under consideration is divided into several parts. Carrying out calculations along the selected integration paths, we obtain asymptotic estimates for solutions of singularly perturbed differential equations.

Ключевые слова: сингулярное возмущение, начальная точка, линии уровня, затягивание потери устойчивости, путь интегрирования, асимптотика, малый параметр, параллельные прямые.

Keywords: singular perturbation, starting point, level lines, tightening of loss of stability, integration path, asymptotic, small parameter, parallel line.

В работе собственные значения матрицы имеют вид $\lambda(t)=t+i$. С помощью параллельных прямых исследуем эти собственные значения и получим оценку включающих особо критической точку. *Цель исследования.* Доказать асимптотическую близость решений сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений и соответствующих невозмущенных уравнений, в случае смены устойчивости на основе конкретного примера.

Материалы и методы исследования

Работа состоит из двух частей:

а). Рассмотрим задачу

$$\varepsilon x'(t,\varepsilon)=\lambda(t)x(t,\varepsilon)+\varepsilon\left[g(t)+f(t,x(t,\varepsilon))\right] \tag{1}$$

$$x(-1,\varepsilon)=x^0(\varepsilon),\ \left|x^0(\varepsilon)\right|=O(\varepsilon) \tag{2}$$

где $0<\varepsilon$ - малый параметр, $t\in[t_0,T]=[-1;1]$, $x(t,\varepsilon)$ - искомая неизвестная функция.

Для решения правой части поставленной задачи (1) требуется выполнение следующих условий:

U1. $g(t)$, $f(t,x)\in Q(\tilde{H})$ - пространство аналитических функций в области $\tilde{H}$, $f(t,0)\equiv 0$, $\left|f(t,\tilde{x})-f(t,\tilde{\tilde{x}})\right|\le M\times\left|\tilde{x}-\tilde{\tilde{x}}\right|$, $0<M$ - некоторая постоянная.

U2. $\lambda(t)=t+i$, $\operatorname{Re}\lambda(t)=t<0$, $-\infty<t<0$; $\operatorname{Re}\lambda(T_0)=0$, $T_0=0$, $\operatorname{Re}\lambda(t)=t>0$, $0<t<+\infty$.

Имеет место следующая теорема:

Теорема 1. Пусть выполнены условия U1-U2. Тогда $\forall t\in[-1;1]$ решение задачи (1)-(2) существует, единственно и для него справедлива оценка

$$|x(t,\varepsilon)|\le C\sqrt{\varepsilon} \tag{3}$$

где $C-const$.

Доказательство. Задачу (1)-(2) заменим интегральным уравнением

$$x(t,\varepsilon)=x^0(\varepsilon)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{-1}^{t}\lambda(s)ds\right)+\int_{-1}^{t}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^{t}\lambda(s)ds\right)\cdot\left[g(\tau)+f(\tau,x(\tau,\varepsilon))\right]d\tau \tag{4}$$

Для доказательства существования решения уравнения (4) применим метод последовательных приближений.

Последовательные приближения определим следующим образом:

$x_0(t,\varepsilon)\equiv 0$,

$$x_n(t,\varepsilon)=x^0(\varepsilon)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{-1}^{t}\lambda(s)ds\right)+\int_{-1}^{t}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^{t}\lambda(s)ds\right)\cdot\left[g(\tau)+f(\tau,x_{n-1}(\tau,\varepsilon))\right]d\tau \tag{5}$$

где $n\in N$.

Далее будем считать, что $t=t_1+it_2$; $\tau=\tau_1+i\tau_2$, где t_1, t_2, τ_1, τ_2 — действительные переменные. Тогда получим

$$\int_{t_0}^{t}\lambda(s)ds=\int_{-1}^{t}\lambda(s)ds=\frac{(t+i)^2-(-1+i)^2}{2},\ u(t_1,t_2)=\operatorname{Re}\int_{-1}^{t}\lambda(s)ds=\frac{1}{2}\left[t_1^2-(t_2+1)^2\right].$$

Рассмотрим область $H_0 = \{(t_1;t_2): u(t_1,t_2) \le 0\}$. Пути интегрирования выберем так, чтобы имело место неравенство

$$u(t_1,t_2) \le u(\tau_1,\tau_2), \tag{6}$$

от начальной точки до конечной точки (t_1,t_2). Главное требование на выбор путей интегрирования для последовательных приближений.

Область H_0 делим на две части: $H_0 = H_1 \cup H_2$, где $H_1 = \{(t_1,t_2) \in H_0, -1 \le t_1 \le 0\}$ и $H_2 = \{(t_1,t_2) \in H_0, 0 \le t_1 \le 1\}$.

Определим убывающие пути интегрирования для области H_1,

$l = l_0 \cup l_1 \cup l_2 \cup l_3$, где

$l_0 = \{(\tau_1,\tau_2): \tau_2 = \tau_1 + 1, -1 \le \tau_1 \le 0\}$,

$l_1 = \{(\tau_1,\tau_2): \tau_2 = -\tau_1 + 1, -\infty > \tau_1 \ge 0\}$,

$l_2 = \{(\tau_1,\tau_2): \tau_2 = -\tau_1 - 1 - \sqrt{\varepsilon}, -\infty < \tau_1 \le -(t_2 + 1 + \sqrt{\varepsilon})\}$,

$l_3 = \{(\tau_1,\tau_2): \tau_2 = t_2, -(t_2 + 1 + \sqrt{\varepsilon}) \le \tau_1 \le t_1\}$.

Во всех выше указанных путях интегрирования условие (6) выполняется и пути интегрировании остаются неизменными для всех последовательных приближений.

Из (5) оценим последовательные приближения на замкнутой области H_1.

$$x_1(t,\varepsilon) = x^0(\varepsilon)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{-1}^{t}\lambda(s)ds\right) + \int_{-1}^{t} g(\tau)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^{t}\lambda(s)ds\right)d\tau .$$

Здесь $\operatorname{Re}\int_{-1}^{t}\lambda(s)ds = \frac{1}{2}\left[t_1^2 - (t_2+1)^2\right] \equiv u(t_1,t_2) \le 0$ при $(t_1,t_2) \in H_0 = H_1 \cup H_2$.

Поэтому $|A(t,\varepsilon)| = \left|x^0(\varepsilon)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{-1}^{t}\lambda(s)ds\right)\right| = O(\varepsilon)$ при $(t_1,t_2) \in H_1$. Остается оценить величины $I(t,\varepsilon) = \int_{-1}^{t} g(\tau)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^{t}\lambda(s)ds\right)d\tau$. Предположим, что $|g(\tau)| = O(1)$ при $(t_1,t_2) \in H_0$.

Тогда $|I(t,\varepsilon)| = O(1)\int_{l}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}(u(t_1,t_2) - u(\tau_1,\tau_2))\right)|d\tau|$, где $l = l_0 \cup l_1 \cup l_2 \cup l_3$.

1). Будем оценивать величину

$$\int_{l_0}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}(u(t_1,t_2) - u(\tau_1,\tau_2))\right)\cdot|d\tau| .$$

Пусть $l_0 = \{(\tau_1,\tau_2): \tau_2 = \tau_1 + 1, -1 \le \tau_1 \le 0\}$.

Тогда $u(t_1,t_2) - u(\tau_1,\tau_2) = \frac{1}{2}\left[t_1^2 - (t_2+1)^2 - \tau_1^2 + (\tau_2+1)^2\right] = \frac{1}{2}\left[t_1^2 - (t_2+1)^2 - \tau_1^2 + (\tau_1+2)^2\right] = $

$= \frac{1}{2}\left[t_1^2 - (t_2+1)^2 + 4\tau_1 + 4\right]$.

Вычисляя интеграл, получены оценка

$$\int_{l_0}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}(u(t_1,t_2) - u(\tau_1,\tau_2))\right)|d\tau| \le \sqrt{2}\exp\left(\frac{u(t_1,t_2)}{\varepsilon}\right)\int_{-1}^{0}\exp\left(\frac{2\tau_1 + 2}{\varepsilon}\right)d\tau_1 = O(\varepsilon) .$$

2). Рассмотрим интеграл

$$\int_{l_1} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\left(u(t_1,t_2)-u(\tau_1,\tau_2)\right)\right)\cdot|d\tau|.$$

Здесь $l_1=\{(\tau_1,\tau_2):\tau_2=-\tau_1+1,-\infty>\tau_1\geq 0\}$. Путь интегрирования l_1 возрастающий. Нам нужен обратный путь. Следовательно, нужный нам путь будет убывающим. Тогда

$$u(\tau_1,\tau_2)=-\frac{1}{2}\left[\tau_1^2-(\tau_2+1)^2\right]=-\frac{1}{2}\left[\tau_1^2-(-\tau_1+2)^2\right]=-2\tau_1+2.$$

Пусть $b-const$, $-\infty<b<0$. Тогда

$$\int_{l_1} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\left(u(t_1,t_2)-u(\tau_1,\tau_2)\right)\right)\cdot|d\tau|=\sqrt{2}\exp\left(\frac{u(t_1,t_2)}{\varepsilon}\right)\int_0^{-b}\exp\left(\frac{2-2\tau_1}{\varepsilon}\right)d\tau_1.$$

Здесь оценка от величины b не зависит. Таким образом, вычисляя интеграл, получим оценку

$$\int_{l_1} \exp\left(\frac{u(t_1,t_2)-u(\tau_1,\tau_2)}{\varepsilon}\right)|d\tau|=O(\varepsilon).$$

3). Теперь вычислим интеграл $\int_{l_2} \exp\left(\frac{u(t_1,t_2)-u(\tau_1,\tau_2)}{\varepsilon}\right)\cdot|d\tau|$ где

$$l_2=\{(\tau_1,\tau_2):\tau_2=-\tau_1-1-\sqrt{\varepsilon},-\infty<\tau_1\leq-(t_2+1+\sqrt{\varepsilon})\},$$

$$u(\tau_1,\tau_2)=-\frac{1}{2}\left[\tau_1^2-(\tau_2+1)^2\right]=-\frac{1}{2}\left[\tau_1^2-\left(-\tau_1-\sqrt{\varepsilon}\right)^2\right]=\frac{1}{2}\left[2\sqrt{\varepsilon}\tau_1+\varepsilon\right].$$

Пусть $-\infty<b<0$, $b-const$. Поэтому

$$\int_{-b}^{-(t_2+1+\sqrt{\varepsilon})} \exp\left(\frac{u(t_1,t_2)-u(\tau_1,\tau_2)}{\varepsilon}\right)\cdot|d\tau|=\sqrt{2}\exp\left(\frac{u(t_1,t_2)}{\varepsilon}\right)\int_{-b}^{-(t_2+1+\sqrt{\varepsilon})}\exp\left(\frac{2\sqrt{\varepsilon}\tau_1+\varepsilon}{2\varepsilon}\right)d\tau_1.$$

Таким образом, вычисляя интеграл, получена оценка

$$\int_{l_2} \exp\left(\frac{u(t_1,t_2)-u(\tau_1,\tau_2)}{\varepsilon}\right)\cdot|d\tau|=O(\sqrt{\varepsilon}).$$

4). Остается вычислить интеграл

$$\int_{l_3} \exp\left(\frac{u(t_1,t_2)-u(\tau_1,\tau_2)}{\varepsilon}\right)\cdot|d\tau|.$$

Здесь $l_3=\{(\tau_1,\tau_2):\tau_2=t_2,-(t_2+1+\sqrt{\varepsilon})\leq\tau_1\leq t_1\}$,

$$u(t_1,t_2)-u(\tau_1,\tau_2)=\frac{1}{2}\left[t_1^2-\tau_1^2\right]\leq t_1(t_1-\tau_1)=t_1(t_1-\tau_1).$$

Получен следующий интеграл

$$\int_{l_3} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\left(u(t_1,t_2)-u(\tau_1,\tau_2)\right)\right)\cdot|d\tau|\leq\int_{l_3}\exp\left(\frac{t_1(t_1-\tau_1)}{\varepsilon}\right)\cdot d\tau_1.$$

Рассмотрим два случая:

1*). Пусть $t_1<-\sqrt{\varepsilon}$, тогда

$$\int_{l_3} \exp\left(\frac{u(t_1,t_2)-u(\tau_1,\tau_2)}{\varepsilon}\right)\cdot|d\tau|\leq\int_{-(t_2+1+\sqrt{\varepsilon})}^{t_1}\exp\left(\frac{t_1(t_1-\tau_1)}{\varepsilon}\right)\cdot d\tau_1=$$

$$=-\frac{\varepsilon}{t_1}\left[\exp\left(\frac{t_1(t_1-\tau_1)}{\varepsilon}\right)\right]_{-(t_2+1+\sqrt{\varepsilon})}^{t_1}=\frac{\varepsilon}{t_1}\left[\exp\left(\frac{t_1(t_1+t_2+1+\sqrt{\varepsilon})}{\varepsilon}\right)-1\right]=O(\varepsilon).$$

2*). Случай $-\sqrt{\varepsilon}\le t_1\le 0$. Тогда будем иметь

$$\int_{l_3}\exp\left(\frac{u(t_1,t_2)-u(\tau_1,\tau_2)}{\varepsilon}\right)|d\tau|=O(1)\int_{-(t_2+1+\sqrt{\varepsilon})}^{t_1}\exp\left(-\frac{\tau_1^2}{2\varepsilon}\right)\cdot d\tau_1.$$

Пусть $\frac{\tau_1}{\sqrt{2\varepsilon}}=s$. Тогда

$$\tau_1=\sqrt{2\varepsilon}s,\ d\tau_1=\sqrt{2\varepsilon}ds,\ \tau_1=t_1,\ s_1=\frac{t_1}{\sqrt{2\varepsilon}},\ \tau_1=-(t_2+1+\sqrt{\varepsilon})\ s_2=-\frac{t_2+1+\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{2\varepsilon}}.$$

$$\sqrt{2\varepsilon}\int_{s_2}^{s_1}\exp(-s^2)ds\le\sqrt{2\varepsilon}\int_0^{+\infty}\exp(-s^2)ds=\frac{\sqrt{2\varepsilon\pi}}{2}.$$

Учтено, что интеграл Пуассона $\int_0^{+\infty}\exp(-s^2)ds=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. В итоге получена оценка

$$\int_{l_3}\exp\left(\frac{u(t_1,t_2)-u(\tau_1,\tau_2)}{\varepsilon}\right)\cdot|d\tau|=O(\sqrt{\varepsilon}).$$

Таким образом, имеет место оценка, если $(t_1,t_2)\in H_1$, то

$$|x_1(t,\varepsilon)|\le C\sqrt{\varepsilon},\qquad (7)$$

где $0<C-const$.

Если $(t_1,t_2)\in H_2$ то $\tilde{l}=\tilde{l}_0\cup\tilde{l}_1\cup\tilde{l}_2$, где

$\tilde{l}_0=\{(\tau_1,\tau_2):\tau_2=\tau_1+1,-1\le\tau_1<+\infty\}$,

$\tilde{l}_1=\{(\tau_1,\tau_2):\tau_2=\tau_1-1-\sqrt{\varepsilon},+\infty>\tau_1\ge t_2+1+\sqrt{\varepsilon}\}$,

$\tilde{l}_2=\{(\tau_1,\tau_2):\tau_2=t_2,t_1\ge\tau_1\ge t_2+1+\sqrt{\varepsilon}\}$.

1.1). Будем оценивать интеграл

$$\int_{\tilde{l}_0}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}(u(t_1,t_2)-u(\tau_1,\tau_2))\right)\cdot|d\tau|.$$

Пусть $b-const$, $0<b<+\infty$ и $\tilde{l}_0=\{(\tau_1,\tau_2):\tau_2=\tau_1+1,-1\le\tau_1<+\infty\}$.

Тогда $u(t_1,t_2)-u(\tau_1,\tau_2)=\frac{1}{2}\left[t_1^2-(t_2+1)^2+4\tau_1+4\right]$.

Таким образом $\int_{\tilde{l}_0}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}(u(t_1,t_2)-u(\tau_1,\tau_2))\right)|d\tau|\le\sqrt{2}\exp\left(\frac{u(t_1,t_2)}{\varepsilon}\right)\int_{-1}^{b}\exp\left(\frac{2\tau_1+2}{\varepsilon}\right)d\tau_1$.

Здесь оценка от величины b не зависит. Таким образом, вычисляя интеграл, получим оценку

$$\int_{\tilde{l}_0}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}(u(t_1,t_2)-u(\tau_1,\tau_2))\right)\cdot|d\tau|=O(\varepsilon).$$

1.2). Рассмотрим интеграл

$$\int_{\tilde{l}_1} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\left(u(t_1,t_2)-u(\tau_1,\tau_2)\right)\right)\cdot|d\tau|.$$

Здесь $\tilde{l}_1=\left\{(\tau_1,\tau_2):\tau_2=\tau_1-1-\sqrt{\varepsilon},+\infty>\tau_1\geq t_2+1+\sqrt{\varepsilon}\right\}$. Пусть $b-const$, $0<b<+\infty$.

Тогда $\int_{\tilde{l}_1} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\left(u(t_1,t_2)-u(\tau_1,\tau_2)\right)\right)\cdot|d\tau|=\sqrt{2}\exp\left(\frac{u(t_1,t_2)}{\varepsilon}\right)\int\limits_{t_2+1+\sqrt{\varepsilon}}^{b}\exp\left(-\frac{2\sqrt{\varepsilon}\tau_1-\varepsilon}{2\varepsilon}\right)d\tau_1$.

Получим оценку $\int_{\tilde{l}_1} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\left(u(t_1,t_2)-u(\tau_1,\tau_2)\right)\right)\cdot|d\tau|=O\left(\sqrt{\varepsilon}\right)$.

1.3). Остается вычислить интеграл

$$\int_{\tilde{l}_3} \exp\left(\frac{u(t_1,t_2)-u(\tau_1,\tau_2)}{\varepsilon}\right)\cdot|d\tau|.$$

Здесь

$\tilde{l}_2=\left\{(\tau_1,\tau_2):\tau_2=t_2,t_1\geq\tau_1\geq t_2+1+\sqrt{\varepsilon}\right\}$,

$u(t_1,t_2)-u(\tau_1,\tau_2)=\frac{1}{2}\left[t_1^2-\tau_1^2\right]\leq t_1(t_1-\tau_1)=-t_1(\tau_1-t_1)$.

Получен следующий интеграл

$$\int_{\tilde{l}_3} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\left(u(t_1,t_2)-u(\tau_1,\tau_2)\right)\right)\cdot|d\tau|\leq\int_{\tilde{l}_3}\exp\left(-\frac{t_1(\tau_1-t_1)}{\varepsilon}\right)\cdot d\tau_1 .$$

Рассмотрим два случая:

1.1.1). Пусть $t_1>\sqrt{\varepsilon}$, тогда

$$\int_{\tilde{l}_3} \exp\left(\frac{u(t_1,t_2)-u(\tau_1,\tau_2)}{\varepsilon}\right)\cdot|d\tau|\leq\int\limits_{t_2+1+\sqrt{\varepsilon}}^{t_1}\exp\left(-\frac{t_1(\tau_1-t_1)}{\varepsilon}\right)\cdot d\tau_1=$$

$$=-\frac{\varepsilon}{t_1}\left[\exp\left(-\frac{t_1(\tau_1-t_1)}{\varepsilon}\right)\right]_{t_2+1+\sqrt{\varepsilon}}^{t_1}=\frac{\varepsilon}{t_1}\left[\exp\left(-\frac{t_1(t_2-t_1+1+\sqrt{\varepsilon})}{\varepsilon}\right)-1\right]=O(\varepsilon).$$

1.1.2). В случай $0\leq t_1\leq\sqrt{\varepsilon}$, будем иметь

$$\int_{\tilde{l}_3} \exp\left(\frac{u(t_1,t_2)-u(\tau_1,\tau_2)}{\varepsilon}\right)|d\tau|=O(1)\int\limits_{t_2+1+\sqrt{\varepsilon}}^{t_1}\exp\left(-\frac{\tau_1^2}{2\varepsilon}\right)\cdot d\tau_1 .$$

Пусть $\frac{\tau_1}{\sqrt{2\varepsilon}}=s$, тогда

$$\tau_1=\sqrt{2\varepsilon}s,\ d\tau_1=\sqrt{2\varepsilon}ds,\ \tau_1=t_1,\ s_1=\frac{t_1}{\sqrt{2\varepsilon}},\ \tau_1=t_2+1+\sqrt{\varepsilon}\ \ s_2=\frac{t_2+1+\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{2\varepsilon}}.$$

$$\sqrt{2\varepsilon}\int\limits_{s_2}^{s_1}\exp\left(-s^2\right)ds\leq\sqrt{2\varepsilon}\int\limits_{0}^{+\infty}\exp\left(-s^2\right)ds=\frac{\sqrt{2\varepsilon\pi}}{2}.$$

В итоге получена оценка $\int_{\tilde{l}_2} \exp\left(\frac{u(t_1,t_2)-u(\tau_1,\tau_2)}{\varepsilon}\right)\cdot|d\tau|=O(\sqrt{\varepsilon})$.

Таким образом, имеет место оценка, если $(t_1,t_2)\in H_2$, то

$$|x_1(t,\varepsilon)| \le C\sqrt{\varepsilon}\,, \tag{8}$$

где $0 < C - const$.

Если $(t_1, t_2) \in H_0$, то учитывая оценки (7) и (8) имеем

$$|x_1(t,\varepsilon)| \le C\sqrt{\varepsilon}\,, \tag{9}$$

где $0 < C - const$.

Теперь рассмотрим сходимости последовательных приближений. В дальнейшем, положительные постоянные величины, которые в рассуждениях существенной роли не играют, и поэтому обозначим их одной той же буквой C. Тогда

$$|x_2(t,\varepsilon) - x_1(t,\varepsilon)| \le \left(C\sqrt{\varepsilon}\right)^2. \tag{10}$$

Далее, имеет место оценка

$$|x_n(t,\varepsilon) - x_{n-1}(t,\varepsilon)| \le \left(C\sqrt{\varepsilon}\right)^n,\ (n = 1,2,...). \tag{11}$$

Из (9)-(11) при условии $C\sqrt{\varepsilon} < 1$ следует, что последовательность функций $x_n(t,\varepsilon)$ в области H равномерно сходится к некоторой функции $x(t,\varepsilon) \in Q(H)$, которая является решением (4). Единственность решения обеспечивается условием $U1$. Теорема доказана.

б). Рассмотрим задачу

$$\varepsilon x'(t,\varepsilon) = D(t)x(t,\varepsilon) + \varepsilon[h(t) + f(t, x(t,\varepsilon))], \tag{12}$$

$$x(-1,\varepsilon) = x^0(\varepsilon),\ \|x^0(\varepsilon)\| = O(\varepsilon) \tag{13}$$

где $0 < \varepsilon$ — малый параметр, $t \in [t_0, T] = [-1;1]$, $h(t) = colon(h_1(t), h_2(t))$, $D(t) = \begin{pmatrix} t+i & 0 \\ 0 & t+i \end{pmatrix}$, $x(t,\varepsilon) = colon(x_1(t,\varepsilon), x_2(t,\varepsilon))$ — искомые неизвестные функции.

U1.1. $h(t)$, $f(t,x) \in Q(\tilde{H})$ — пространство аналитических функций в области $\tilde{H}$, $f(t,0) \equiv 0$, $\|f(t,\tilde{x}) - f(t,\tilde{\tilde{x}})\| \le M \times \|\tilde{x} - \tilde{\tilde{x}}\|$, $0 < M$ — некоторая постоянная.

U1.2. Пусть выполняется условие U2.

Имеет место следующая теорема:

Теорема 2. Пусть выполнены условия U1.1-U1.2. Тогда $\forall t \in [-1,1]$ решение задачи (12)-(13) существует, единственно и для него справедлива оценка

$$\|x(t,\varepsilon)\| \le C\sqrt{\varepsilon}\,, \tag{14}$$

где $C - const$.

Доказательство. Задачу (12)-(13) заменим интегральным уравнением

$$x(t,\varepsilon) = x^0(\varepsilon)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{-1}^{t} D(s)ds\right) + \int_{-1}^{t}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^{t} D(s)ds\right)[h(\tau) + f(\tau, x(\tau,\varepsilon))]d\tau\,, \tag{15}$$

Т. 10. №2. 2024
https://doi.org/10.33619/2414-2948/99

Для доказательства существования решения уравнения (15) применим метод последовательных приближений. Последовательные приближения определим следующим образом:

$x_0(t,\varepsilon)\equiv 0$,

$$x_n(t,\varepsilon)=x^0(\varepsilon)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t D(s)ds\right)+\int_0^t \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t D(s)ds\right)\cdot\left[h(\tau)+f(\tau,x_{n-1}(\tau,\varepsilon))\right]d\tau, \qquad (16)$$

где $x_n(t,\varepsilon)=colon\left(x_{1n}(t,\varepsilon),x_{2n}(t,\varepsilon)\right),\ n\in N$.

Если $(t_1,t_2)\in H_0$, то аналогично определяя область, выбора путей интегрирования и проводя вычисления по вышеуказанному в скалярном случае для первого приближения имеем оценку

$$\|x_1(t,\varepsilon)\|\le C\sqrt{\varepsilon}, \qquad (17)$$

где $0<C-const$.

В дальнейшем, положительные постоянные величины, которые в рассуждениях существенной роли не играют, обозначим одной той же буквой C. Тогда

$$\|x_2(t,\varepsilon)-x_1(t,\varepsilon)\|\le M\int_l \|x_1(\tau,\varepsilon)\|\exp\left(\frac{u(t_1,t_2)-u(\tau_1,\tau_2)}{\varepsilon}\right)\cdot|d\tau|\le$$

$$\le MC\sqrt{\varepsilon}\int_l \exp\left(\frac{u(t_1,t_2)-u(\tau_1,\tau_2)}{\varepsilon}\right)\cdot|d\tau|\le\left(C\sqrt{\varepsilon}\right)^2.$$

Получим

$$\|x_2(t,\varepsilon)-x_1(t,\varepsilon)\|\le\left(C\sqrt{\varepsilon}\right)^2. \qquad (18)$$

Далее, имеет место оценка

$$\|x_n(t,\varepsilon)-x_{n-1}(t,\varepsilon)\|\le\left(C\sqrt{\varepsilon}\right)^n,\ (n=1,2,...). \qquad (19)$$

Из (17)-(19) при условии $C\sqrt{\varepsilon}<1$ следует, что последовательность функций $x_n(t,\varepsilon)$ в области H равномерно сходится к некоторой функции $x(t,\varepsilon)\in Q(H)$, которая является решением (15). Единственность решения обеспечивается условием $U1.1$. Теорема доказано.

Результаты и обсуждения

В работе на основе рассматриваемого классического примера для одного собственного значения матрицы провели вычисления нового способа. В новом способе выбора путей интегрирования коренным образом отличается способам выбора путей интегрирования в работе [1]. В итоге получается не улучшаемая оценка. Пути интегрирования для всех последовательных приближений остаются неизменными.

Вывод

Используя основные понятия проективной геометрии создан новый способ для исследования решений сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений. Как преимущество можно считать, что пути интегрирования для последовательных приближений остаются неизменными. А также направление вычислений. Если собственные значение матрицы остаются комплексно сопряженными, тогда в некотором случае появиться ограничение области. Остается, проверить этот случай. Об этом объявим в следующих исследованиях.

Как преимущества способа можно считать, что для кратных собственных значений, а также для действительных собственных значений применим этот способ.

Список литературы:

1. Шишкова М. А. Рассмотрение одной системы дифференциальных уравнений с малым параметром при высших производных // Доклады Академии наук. 1973. Т. 209. №3. С. 576-579. https://www.mathnet.ru/rus/dan37550

References:

1. Shishkova, M. A. (1973). Rassmotrenie odnoi sistemy differentsial'nykh uravnenii s malym parametrom pri vysshikh proizvodnykh. *Doklady Akademii nauk, 209*(3), 576-579. (in Russian).

Работа поступила в редакцию 19.01.2024 г.

Принята к публикации 24.01.2024 г.

Ссылка для цитирования:

Каримов С., Акматов А. А. Исследования решений сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений // Бюллетень науки и практики. 2024. Т. 10. №2. С. 13-21. https://doi.org/10.33619/2414-2948/99/01

Cite as (APA):

Karimov, S., & Akmatov, A. (2024). Investigations of Solutions of Singularly Perturbed Differential Equations. *Bulletin of Science and Practice, 10*(2), 13-21. (in Russian). https://doi.org/10.33619/2414-2948/99/01