УДК 517.95 https://doi.org/10.33619/2414-2948/98/02

АНАЛОГ ЗАДАЧИ ДАРБУ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА В ПРЯМОУГОЛЬНО ТРЕУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

©Асылбеков Т. Д., *SPIN-код: 9969-4837, канд. физ.-мат. наук, Ошский государственный университет, г. Ош, Кыргызстан, atd5929@mail.ru*
©Нуранов Б. Ш., *Ошский государственный университет, г. Ош, Кыргызстан, nuranov2014@mail.ru*

AN ANALOGUE OF THE DARBOUX PROBLEM FOR HYPERBOLIC EQUATIONS OF THE THIRD ORDER IN A RECTANGULAR TRIANGULAR DOMAIN

©Asylbekov T., *SPIN-code: 9969-4837, Ph.D., Osh State University, Osh, Kyrgyzstan, atd5929@mail.ru*
©Nuranov B., *Osh State University, Osh, Kyrgyzstan, nuranov2014@mail.ru*

Аннотация. Рассматривается задача Дарбу для гиперболического уравнения третьего порядка в прямоугольно треугольной области. Основной целью статьи является доказательство разрешимости задачи Дарбу. Методом функции Римана задача приведена к интегральным уравнениям Вольтерра второго рода. Методом интегральных уравнений доказано существование единственного решения задачи Дарбу. Полученное решение задачи Дарбу позволяет описать процесс влагопереноса в почвогрунтах, передачи тепла в гетерогенной среде, фильтрации жидкости в пористых средах.

Abstract. The article considers the Darboux problem for a third-order hyperbolic equation in a rectangular triangular domain. The main purpose of the article is to prove the solvability of the Darboux problem. Using the Riemann function method, the problem is reduced to Volterra integral equations of the second kind. The existence of a unique solution to the Darboux problem is proved by the method of integral equations. The obtained solution of the Darboux problem allows us to describe the process of moisture transfer in soils, heat transfer in a heterogeneous medium, and liquid filtration in porous media.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение третьего порядка, гиперболическое уравнение, функция Римана, интегральное уравнение, задача Дарбу, метод последовательных приближений, сопряженные уравнение.

Keywords: third order differential equation, hyperbolic equation, Riemann function, integral equation, Darboux’s problem, method of successive approximations, conjugate equation.

Исследование влагопереноса в почвогрунтах, передачи тепла в гетерогенной среде [3], фильтрации жидкости в пористых средах [1, 2], приводят к изучению уравнениям в частных производных гиперболического типа третьего порядка. Известно, что решение выше указанных и многих прикладных задач биологии, механики, физики сводится к исследованию локальных и нелокальных краевых задач для уравнений третьего порядка гиперболического типа.

Краевые задачи для модифицированного уравнения влагопереноса исследованы в работах [4, 5]. Нелокальные задачи для гиперболических уравнений третьего порядка исследованы в работах [6]. Краевые задачи для различных уравнений гиперболического типа третьего порядка изучены в работах [7]. Однако мало исследованы некоторые виды общих уравнений третьего порядка гиперболического типа, обеспечивающих существование и единственность решения соответствующих задач.

Локальные, нелокальные задачи для уравнений в частных производных третьего, четвертого порядков гиперболического типа изучены в работах [9–11] и М. Х. Шханукова [4, 5], А. Сопуева [8] и их учеников.

В данной работе исследованы задача Дарбу в области $\forall a, b \in R, a > 0,$

$b < 0, \quad D = \{(x, y): x \leq x_0 \cap y \geq 0 \cap y \leq ax + b\}$ для общего гиперболического уравнения третьего порядка, решения которых получены в явном виде. Полученные представления могут применяться при решении вызываемых большой практический и теоретический интерес различных биологических и физических задач.

Постановка задачи

В области D рассмотрим задачу Дарбу для уравнения

$$u_{xxy}(x, y) + \alpha(x, y)u_y(x, y) + \beta(x, y)u_{xx}(x, y) + \gamma(x, y)u_x(x, y) + \\ +\delta(x, y)u(x, y) = f(x, y), \tag{1}$$

где

$$\alpha(x, y), \beta(x, y), \gamma(x, y), \delta(x, y) \in C(D), u(x, y), u_x(x, y), u_y(x, y), u_{xx}(x, y) \in \\ C(\bar{D}), u_{xxy}(x, y) \in C(D). \tag{2}$$

Задача (Дарбу) 1. Найти в области D решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям:

$$u(x_0, y) = \varphi_1(y), \tag{3}$$

$$u_y|y = ax + b = \lambda(x), \tag{4}$$

$$u_{yy}|y = ax + b = \mu(x), \tag{5}$$

где $\varphi_1(y), \lambda(x), \mu(x)$ - заданные гладкие функции.

Разрешимость задачи

Функция Римана. Сначала в области D рассмотрим вспомогательную задачу Коши для уравнения (1), с условиями заданными вдоль прямой $y = ax + b$: (4), (5), $u|y = ax + b = \tau(x)$, $\tau(x) -$ пока неизвестная функция, и условиям согласования [9–11]

$$\tau(x_0) = \varphi_1(ax_0 + b), \lambda(x_0) = \varphi_1^{'}(ax_0 + b), \mu(x_0) = \varphi_1^{''}(ax_0 + b). \tag{6}$$

Сначала найдем сопряженное уравнение (1) в виде:

$L^*(v) = -v_{xxy} - (\alpha v)_y + (\beta v)_{xx} - (\gamma v)_x + \delta v.$

Тогда имеет место тождества:

$$vL(u) - uL^*(v) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}, \tag{7}$$

где $P = vu_{xy} - v_x u_y + \beta v u_x - (\beta v)_x + \gamma v u, Q = v_{xx}u + \alpha v u.$

Для удобства переходим к переменным ξ, η .

Через точку $\forall C(x, y) \in D$ проводим характеристические прямые тогда образуется прямоугольный треугольник $D_0 = \{(\xi, \eta): \xi \leq x \cap \eta \geq \xi, \eta \leq a\xi + b\}$ в плоскости ξ, η с вершинами $A(x, ax+b), B(\frac{-b+y}{a}, y), C(x,y)$.

Используя формулу Грина, будем интегрировать тождество (7) по контуру ∂D, и учитывая условия:

$$\frac{\partial u}{\partial x}|y = ax+b = \tau^{'}(x) - \lambda(x)a, \tag{8}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}|y = ax+b = \lambda^{'}(x) - \mu(x)a, \tag{9}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}|y = ax+b = \tau^{''}(x) - 2\lambda^{'}(x)a + \mu(x)a^2, \tag{10}$$

получим представление решения вспомогательной задачи Коши в виде:

$$u(x,y) = v_\xi(x,y;x,ax+b)\tau(x) + \int_x^{(b-y)/a} \{v(x,y;\xi,a\xi+b)(\lambda^{'}(\xi) - \mu(\xi)a) - \\ -v_\xi(x,y;\xi,a\xi+b)\lambda(\xi) + \beta(\xi,a\xi+b)v(x,y;\xi,a\xi+b)(\tau^{'}(\xi) - \lambda(\xi)a) - \\ -(\beta(\xi,a\xi+b)v(x,y;\xi,a\xi+b))_\xi + (\gamma(\xi,a\xi+b)v(x,y;\xi,a\xi+b) + \\ +v_{\xi\xi}(x,y;\xi,a\xi+b) + \alpha(\xi,a\xi+b)v(x,y;\xi,a\xi+b))\tau(\xi)a\}d\xi - \\ -\int_D\int v(x,y;\xi,\eta)f(\xi,\eta)d\eta, \tag{11}$$

где $v(x,y;\xi,\eta)$ - функция Римана удовлетворяет условиям:
$v(x,y;\xi,\eta) \in \{v, v_\xi, v_\eta, v_{\xi\xi} \in C(\bar{D}), v_{\xi\xi\eta} \in C(D)\}$,
по совокупности переменных; $v(x,y;\xi,\eta)$— решение сопряженной задачи

$$\begin{cases} L^*(v) = -v_{xxy} - (\alpha v)_y + (\beta v)_{xx} - (\gamma v)_x + \delta v, \\ v(x,y;\xi,\eta)|\xi = x = 0, v_\xi(x,y;x,\eta) = exp(\int_y^\eta \beta(x,\eta_1)d\eta_1), \\ v(x,y;\xi,\eta)|\eta = y = \omega(x,y,\xi), \end{cases} \tag{12}$$

где $\omega(x,y,\xi)$ — является решением следующей задачи Коши:

$$\begin{cases} v_{\xi\xi}(x,y;\xi,y) + \alpha(\xi,y)v(x,y;\xi,y) = 0, \\ v(x,y;\xi,y)|\xi = x = 0, v_\xi(x,y;\xi,y)|\xi = x = 1. \end{cases} \tag{13}$$

Если в представление (10) положим $x = x_0$ и учитывая условия согласования получим:

$$\varphi_1(y) = v_\xi(x_0,y;x_0,ax_0+b)\varphi_1(ax_0+b) \\ + \int_{x_0}^{(b-y)/a} \{v(x_0,y;\xi,a\xi+b)(\lambda^{'}(\xi) - \\ -\mu(\xi)a) - v_\xi(x_0,y;\xi,a\xi+b)\lambda(\xi) + \beta(\xi,a\xi+b)v(x_0,y;\xi,a\xi+b)(\tau^{'}(\xi) - \\ -\lambda(\xi)a) - (\beta(\xi,a\xi+b)v(x_0,y;\xi,a\xi+b))_\xi + (\gamma(\xi,a\xi+b)v(x_0,y;\xi,a\xi \\ +b) + \\ +v_{\xi\xi}(x_0,y;\xi,a\xi+b) + \alpha(\xi,a\xi+b)v(x_0,y;\xi,a\xi+b))\tau(\xi)a\}d\xi - \\ -\int_D\int v(x_0,y;\xi,\eta)f(\xi,\eta)d\xi d\eta. \tag{14}$$

Применив интегрирование по частям и учитывая условия согласования (6), получим интегральное уравнение Вольтерра второго рода в виде:

$$B(y)\tau((b-y)/a)-\int_{x_0}^{(b-y)/a}A(\xi,y)\tau(\xi)\,d\xi=F(y), \tag{15}$$

где $A(\xi,y)=(\beta(\xi,a\xi+b)v(x_0,y;\xi,a\xi+b))_\xi+(\gamma(\xi,a\xi+b)\times$

$$\times v(x_0,y;\xi,a\xi+b)+(\gamma(\xi,a\xi+b)v(x_0,y;\xi,a\xi+b)+v_{\xi\xi}(x_0,y;\xi,a\xi+b)+$$
$$+\alpha(\xi,a\xi+b)v(x_0,y;\xi,a\xi+b))a,$$
$$B(y)=\beta(x_0,2b-y)v(x_0,y;x_0,2b-y),$$
$$F(y)=-\varphi_1(y)+v_\xi(x_0,y;x_0,ax_0+b)\varphi_1(ax_0+b)+\int_{x_0}^{(b-y)/a}\{v(x_0,y;\xi,a\xi+b)(\lambda'(\xi)-$$
$$-\mu(\xi)a)-(v_\xi(x_0,y;\xi,a\xi+b)+\beta(\xi,a\xi+b)v(x_0,y;\xi,a\xi+b)a)\lambda(\xi)-$$
$$-(\beta(\xi,a\xi+b)v(x,y;\xi,a\xi+b))_\xi+(\gamma(\xi,a\xi+b)v(x,y;\xi,a\xi+b)+$$
$$+v_{\xi\xi}(x_0,y;\xi,a\xi+b)-\beta(x_0,ax_0+b)v(x_0,y;x_0,ax_0+b)\varphi(ax_0+b)\}d\xi-$$
$$-\int_D\int v(x_0,y;\xi,\eta)f(\xi,\eta)d\xi d\eta\,.$$

Решив интегральное уравнение Вольтерра второго рода (15) методом последовательных приближений и подставляя в (11) найденную функцию $\tau(\xi)$, получим решение задачи Дарбу (1)-(5).

Таким образом, справедлива следующая

Теорема. Если $y=ax+b, \forall a,b\in R, a\neq 0$ любая прямая, то задача Дарбу для уравнение (1) с условиями (2) -(5) в области D существует и имеет единственное решение.

Задача (Дарбу) 2. Найти в области D решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям (3), (5) и

$$u_x(x_0,y)=\varphi_2(y), \tag{16}$$

где $\varphi_1(y),\varphi_2(x),\mu(x)$— заданные гладкие функции.

Разрешимость задачи

Функция Римана. Аналогично задаче 1 сначала в области D рассмотрим вспомогательную задачу Коши для уравнения (1), с условиями заданными вдоль прямой $y=ax+b$: (5), и $u|y=ax+b=\tau(x), u_y|y=ax+b=\chi(y), \chi(x),\tau(x)-$ пока неизвестные функции, и условиям согласования

$$\tau(x_0)=\varphi_1(ax_0+b),\chi(x_0)=\varphi_1'(ax_0+b),\tau'(x_0)=\varphi_2(ax_0+b). \tag{17}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}|y=ax+b=\tau'(x)-\chi(x)a, \tag{18}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}|y=ax+b=\chi'(x)-\mu(x)a, \tag{19}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}|y=ax+b=\tau''(x)-2\chi'(x)a+\mu(x)a^2, \tag{20}$$

Алогично получим представление решения вспомогательной задачи Коши в виде:

$$u(x,y) = v_\xi(x,y;x,ax+b)\tau(x) + \int_x^{(b-y)/a} \{v(x,y;\xi,a\xi+b)(\chi'(\xi)-\mu(\xi)a) - \tag{21}$$
$$-v_\xi(x,y;\xi,a\xi+b)\chi(\xi)+\beta(\xi,a\xi+b)v(x,y;\xi,a\xi+b)(\tau'(\xi)-\chi(\xi)a)-$$
$$-(\beta(\xi,a\xi+b)v(x,y;\xi,a\xi+b))_\xi+(\gamma(\xi,a\xi+b)v(x,y;\xi,a\xi+b)+$$
$$+v_{\xi\xi}(x,y;\xi,a\xi+b)+\alpha(\xi,a\xi+b)v(x,y;\xi,a\xi+b))\tau(\xi)a\}d\xi-$$
$$-\int_D\int v(x,y;\xi,\eta)f(\xi,\eta)d\eta,$$

В представление (21) положим $X = X_0$ и учитывая условиям согласования (17), применив интегрирования по частям получим первое интегральное уравнение. Далее дифференцируя (21) по X, положив $X = X_0$, применив интегрирование по частям и учитывая условия согласования (17), получим второе интегральное уравнение. В конечном результате получим систему интегральных уравнений Вольтерра второго рода в виде:

$$\begin{cases} C_1(y)\tau((b-y)/a)+v(x_0,y;\xi,a\xi+b)\chi((b-y)/a)-\int_{x_0}^{(b-y)/a}(A_1(\xi,y)\tau(\xi)+ \\ +B_1(\xi,y)\chi(\xi))d\xi=F_1(y), \\ C_2(y)\tau((b-y)/a)+v_x(x_0,y;\xi,a\xi+b)\chi((b-y)/a)-\int_{x_0}^{(b-y)/a}(A_2(\xi,y)\tau(\xi)+ \\ +B_2(\xi,y)\chi(\xi))d\xi=F_2(y), \end{cases} \tag{22}$$

где

$$A_1(\xi,y)=(\beta(\xi,a\xi+b)v(x_0,y;\xi,a\xi+b))_\xi+(\gamma(\xi,a\xi+b)\times$$
$$\times v(x_0,y;\xi,a\xi+b)+(\gamma(\xi,a\xi+b)v(x_0,y;\xi,a\xi+b)+v_{\xi\xi}(x_0,y;\xi,a\xi+b)+$$
$$+\alpha(\xi,a\xi+b)v(x_0,y;\xi,a\xi+b))a,$$
$$B_1(\xi,y)=-\beta(\xi,a\xi+b)v(x_0,y;\xi,a\xi+b)a-2v_\xi(x_0,y;\xi,a\xi+b),$$
$$C_1(y)=\beta(x_0,2b-y)v(x_0,y;x_0,2b-y),$$
$$F_1(y)=-\varphi_1(y)+(v_\xi(x_0,y;x_0,ax_0+b)-\beta(x_0,2b-y)v(x_0,y;x_0,ax_0+b)\varphi_1(ax_0+b)-$$
$$-v(x_0,y;x_0,ax_0+b)\varphi_1'(ax_0+b)-\int_{x_0}^{(b-y)/a}v(x,y;\xi,a\xi+b)\mu(\xi)ad\xi-$$
$$-\int_D\int v(x_0,y;\xi,\eta)f(\xi,\eta)d\xi d\eta,$$
$$A_2(\xi,y)=(\beta(\xi,a\xi+b)v_x(x_0,y;\xi,a\xi+b))_\xi+(\gamma(\xi,a\xi+b)\times$$
$$\times v_x(x_0,y;\xi,a\xi+b)+(\gamma(\xi,a\xi+b)v_x(x_0,y;\xi,a\xi+b)+$$
$$+v_{\xi\xi x}(x_0,y;\xi,a\xi+b)+\alpha(\xi,a\xi+b)v(x_0,y;\xi,a\xi+b))a,$$
$$B_2(\xi,y)=-\beta(\xi,a\xi+b)v_x(x_0,y;\xi,a\xi+b)a-2v_{\xi x}(x_0,y;\xi,a\xi+b),$$
$$C_2(y)=\beta(x_0,2b-y)v_x(x_0,y;x_0,2b-y),$$
$$F_2(y)=-\varphi_2(y)+(v_{\xi x}(x,y;x,ax+b)-\beta(x_0,2b-y)v_x(x_0,y;x_0,ax_0+b)\varphi_1(ax_0+b)-$$
$$-v_x(x_0,y;x_0,ax_0+b)\varphi_1'(ax_0+b)+v_\xi(x,y;x,ax+b)\varphi_2(ax_0+b)+$$
$$-\int_{x_0}^{(b-y)/a}v(x,y;\xi,a\xi+b)\mu(\xi)ad\xi-\int_D\int v(x_0,y;\xi,\eta)f(\xi,\eta)d\xi d\eta.$$

Решив систему интегральных уравнений Вольтерра второго рода (19) методом последовательных приближений и подставляя в (21) найденные функции $\tau(\xi)$ $\chi(y)$, получим решение задачи Дарбу (1)-(3), (5) и (16).

Теорема. Если $y = ax + b, \forall a, b \in R, a \neq 0$ любая прямая, то уравнение (1) с условиями (2), (3),(5), (16) в области D существует и имеет единственное решение.

Задача (Дарбу) 3. Найти в области D решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям (3), (16) и

$$u_{xx}(x_0, y) = \varphi_3(y), \tag{20}$$

где $\varphi_1(y), \varphi_2(x), \varphi_3(x)$— заданные гладкие функции.

Аналогично получим систему интегральных уравнений Вольтерра второго рода с тремя неизвестными функциями.

Решив систему интегральных уравнений Вольтерра второго рода методом последовательных приближений, получим решение задачи Дарбу (1)-(3), (6) и (20).

Мы исследовали задачи Дарбу в областях образованных двумя характеристиками, прямоугольными треугольниками в нижней части прямой $y = ax + b$. Аналогично доказываются в областях образованные двумя характеристиками, прямоугольными треугольниками в верхней части прямой $y = ax + b$. Например, в области $D = \{(x, y): x \geq x_0 \cap y \leq y_0 \cap y \geq ax + b\} \forall a, b \in R,\ a > 0, b < 0$ следующие смешанные задачи поставлены корректно.

1) $u(x_0, y) = \varphi_1(y), u(x, y_0) = \psi_1(x), u|y = ax + b = \tau(x)$,

2) $u(x_0, y) = \varphi_1(y), u_x(x_0, y) = \varphi_2(y), u|y = ax + b = \tau(x)$,

3) $u(x_0, y) = \psi_1(y), u_y(x, y_0) = \psi_2(x), u|y = ax + b = \tau(x)$,

4) $u_x(x_0, y) = \varphi_1(y), u(x, y_0) = \psi_1(x), u_y|y = ax + b = \lambda(x)$,

5) $u(x_0, y) = \varphi_1(y), u(x, y_0) = \psi_1(x), u_{yy}|y = ax + b = \mu(x)$,

6) $u(x_0, y) = \varphi_1(y), u|y = ax + b = \tau(x),, u_y|y = ax + b = \lambda(x)$,

Из способа получения решения задачи следует, что поставленные задачи могут иметь лишь единственное решение, так как мы получили для неизвестных функций явные и однозначно определенные выражения, не делая никаких предположений о них, кроме их существования.

Вывод

Очевидно, что задачи Дарбу в областях образованных двумя характеристиками, прямоугольными треугольниками в нижней и верхней части прямой $y = ax + b$ поставлены корректно. Таким образом, каждая из двух характеристик образуют правую или левую стороны прямой $y = ax + b$ прямоугольных треугольников. В этих областях разрешимости задачи Дарбу аналогично доказываются. В заключение отметим, что задачи, рассмотренные в [12, 13] методом функции Римана, могут быть обобщены для гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа третьего порядка.

Список литературы:

1. Баренблатт Г. И., Желтов Ю. П., Кочина И. Н. Основы теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах // Прикладная математика и механика. 1960. Т. 24. №5. С. 1286-1303. EDN JGFDIV.

2. Дзекцер Е. С. Уравнение движения подземных вод со свободной поверхностью в многослойных средах // Доклады Академии наук. 1975. Т. 220. №3. С. 540-543.

3. Рубинштейн Л. И. К вопросу о процессе распространения тепла в гетерогенных средах // Известия АН СССР. Серия географическая. 1948. Т. 12. №1. С. 27-45.

4. Шхануков М. Х. О некоторых краевых задачах для уравнения третьего порядка, возникающих при моделировании фильтрации жидкости в пористых средах // Дифференциальные уравнения. 1982. Т. 18. №4. С. 689-699.

5. Шхануков-Лафишев М. Х. Об одном методе решения краевых задач для уравнений третьего порядка // Доклады Академии наук. 1982. Т. 265. №6. С. 1327-1330.

6. Водахова В. А. Об одной краевой задаче для уравнения третьего порядка с нелокальным условием А М Нахушева // Дифференциальные уравнения. 1983. Т. 19. №1. С. 163-166.

7. Джамалов С. З. О корректности одной нелокальной краевой задачи с постоянным коэффициентом для многомерного уравнения смешанного типа второго порядка // Математические заметки СВФУ. 2017. Т. 24. №4. С. 17-27. https://doi.org/10.25587/SVFU.2018.4.11313

8. Сопуев А. Краевые задачи для уравнений четвертого порядка и уравнений смешанного типа: дисс. … д-ра физ.-мат. наук. Бишкек, 1996. 249 с.

9. Асылбеков Т. Д. Начально-краевые задачи для гиперболических уравнений четвертого порядка: дисс. … канд. физ.-мат. наук. Бишкек, 2003. 130 с.

10. Асылбеков Т. Д., Нуранов Б. Ш., Таалайбеков Н. Т. Нелокальные краевые задачи типа Бицадзе-Самарского для гиперболического уравнения четвертого порядка с разрывными коэффициентами // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. 2019. №3. С. 11-17.

11. Асылбеков Т. Д., Нуранов Б. Ш., Таалайбеков Н. Т. Нелокальные краевые задачи с интегральными условиями для модельного гиперболического уравнения четвертого порядка с трехкратными характеристиками // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. 2019. №3. С. 22-29.

12. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. М., 1951. 544 с.

13. Лыков А. В., Михайлов Ю. А. Теория тепло и массопереноса. М.: Госэнергоиздат, 1963. 536 с.

References:

1. Barenblatt, G. I., Zheltov, Yu. P., & Kochina, I. N. (1960). Osnovy teorii fil'tratsii odnorodnykh zhidkostei v treshchinovatykh porodakh. *Prikladnaya matematika i mekhanika, 24*(5), 1286-1303. (in Russian).

2. Dzektser, E. S. (1975). Uravnenie dvizheniya podzemnykh vod so svobodnoi poverkhnost'yu v mnogosloinykh sredakh. In *Doklady Akademii nauk* (Vol. 220, No. 3, pp. 540-543). (in Russian).

3. Rubinshtein, L. I. (1948). K voprosu o protsesse rasprostraneniya tepla v geterogennykh sredakh. *Izvestiya AN SSSR. Seriya geograficheskaya, 12*(1), 27-45. (in Russian).

4. Shkhanukov, M. Kh. (1982). O nekotorykh kraevykh zadachakh dlya uravneniya tret'ego poryadka, voznikayushchikh pri modelirovanii fil'tratsii zhidkosti v poristykh sredakh. *Differentsial'nye uravneniya, 18*(4), 689-699. (in Russian).

5. Shkhanukov-Lafishev, M. Kh. (1982). Ob odnom metode resheniya kraevykh zadach dlya uravnenii tret'ego poryadka. In *Doklady Akademii nauk* (Vol. 265, No. 6, pp. 1327-1330). (in Russian).

6. Vodakhova, V. A. (1983). Ob odnoi kraevoi zadache dlya uravneniya tret'ego poryadka s nelokal'nym usloviem A. M. Nakhusheva. *Differentsial'nye uravneniya, 19*(1), 163-166. (in Russian).

7. Dzhamalov, S. Z. (2017). O korrektnosti odnoi nelokal'noi kraevoi zadachi s postoyannym

koeffitsientom dlya mnogomernogo uravneniya smeshannogo tipa vtorogo poryadka. *Matematicheskie zametki SVFU, 24*(4), 17-27. (in Russian). https://doi.org/10.25587/SVFU.2018.4.11313

8. Sopuev, A. (1996). Kraevye zadachi dlya uravnenii chetvertogo poryadka i uravnenii smeshannogo tipa: Dis. …dokt. fiz. –mat. nauk.-Bishkek. (in Russian).

9. Asylbekov, T. D. (2003). Nachal'no-kraevye zadachi dlya giperbolicheskikh uravnenii chetvertogo poryadka: diss. … kand. fiz.-mat. nauk. Bishkek. (in Russian).

10. Asylbekov, T. D., Nuranov, B. Sh., & Taalaibekov, N. T. (2019). Nelokal'nye kraevye zadachi tipa Bitsadze-Samarskogo dlya giperbolicheskogo uravneniya chetvertogo poryadka s razryvnymi koeffitsientami. *Nauka, novye tekhnologii i innovatsii Kyrgyzstana,* (3), 11-17. (in Russian).

11. Asylbekov, T. D., Nuranov, B. Sh., & Taalaibekov, N. T. (2019). Nelokal'nye kraevye zadachi s integral'nymi usloviyami dlya model'nogo giperbolicheskogo uravneniya chetvertogo poryadka s trekhkratnymi kharakteristikami. *Nauka, novye tekhnologii i innovatsii Kyrgyzstana,* (3), 22-29. (in Russian).

12. Kurant, R., & Gil'bert, D. (1951). Metody matematicheskoi fiziki. Moscow. (in Russian).

13. Lykov, A. V., & Mikhailov, Yu. A. (1963). Teoriya teplo i massoperenosa. Moscow. (in Russian).

Работа поступила в редакцию 15.12.2023 г.

Принята к публикации 24.12.2023 г.

Ссылка для цитирования:

Асылбеков Т. Д., Нуранов Б. Ш. Аналог задачи Дарбу для гиперболических уравнений третьего порядка в прямоугольно треугольной области // Бюллетень науки и практики. 2024. Т. 10. №1. С. 23-30. https://doi.org/10.33619/2414-2948/98/02

Cite as (APA):

Asylbekov, T., & Nuranov, B. (2024). An Analogue of the Darboux Problem for Hyperbolic Equations of the Third Order in a Rectangular Triangular Domain. *Bulletin of Science and Practice, 10*(1), 23-30. (in Russian). https://doi.org/10.33619/2414-2948/98/02