УДК 517.983 https://doi.org/10.33619/2414-2948/97/03

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО РОДА

©Чоюбеков С. М., *ORCID: 0009-0004-1937-5408, Ошский государственный университет, г. Ош, Кыргызстан, choybekov.25.04.70@gmail.com*
©Чоюбекова А. М., *ORCID: 0009-0002-4722-3204, Ошский государственный университет, г. Ош, Кыргызстан, aijamal030188@gmail.com*

REGULARIZATION OF THE SOLUTION OF A NONLINEAR INTEGRAL EQUATION OF THE FIRST KIND

©Choyubekov S., *ORCID: 0009-0004-1937-5408, Osh State University, Osh, Kyrgyzstan, choybekov.25.04.70@gmail.com*
©Choyubekova A., *ORCID: 0009-0002-4722-3204, Osh State University, Osh, Kyrgyzstan, aijamal030188@gmail.com*

Аннотация. Интегральные уравнения, основной раздел математики, широко используются в физике, технике, механике, теории управления и других областях. Связанные с применением интегральных уравнений, развиваются новые области, такие как экономические науки, некоторые разделы биологии и т. д. Теория интегральных уравнений в основном развивалась в конце девятнадцатого — начале двадцатого века, начиная с Вито Вольтерры (1982, 1986), Эрика Ивара Фредгольма (2010), Давида Гильберта, Эрхарда Шмидта и т. д. ее начали изучать ученые. Тем не менее, в рамках математических концепций, существовавших до первой половины двадцатого века, такие задачи считались некорректными из-за того, что небольшое изменение заданных функций приводило к большему изменению искомых функций. Уравнение Вольтерра первого рода — это интегральное уравнение, которое имеет точное решение только в некоторых случаях. Предел интеграции был проведен в очень небольших количествах по неклассическим линейным и нелинейным интегральным уравнениям с переменными пределами и построение решений в этих работах основано на численных методах. Поэтому для так называемых неклассических интегральных уравнений Вольтерра актуальным является определение условий, обеспечивающих единственность и регуляризацию их решений. В рассматриваемой работе разрешено решение единственности неклассического нелинейного интегрального уравнения Вольтерра первого рода. Целью исследования является решение неклассического интегрального уравнения Вольтерра первого рода, то есть определение условий, обеспечивающих единственность решения нелинейного неклассического интегрального уравнения Вольтерра первого рода. Предложенные методы можно использовать для исследования интегральных, интегро-дифференциальных уравнений типа интегрального уравнения Вольтерра первого рода, а также при качественном исследовании некоторых прикладных процессов в области физики, экологии, медицины, геофизики, теории управления сложными системами.

Abstract. Integral equations, the main branch of mathematics, are widely used in physics, engineering, mechanics, control theory and other fields. Related to the application of integral equations, new fields are developing, such as economics, some sections of biology, etc. The theory of integral equations mainly developed in the late nineteenth-early twentieth century, starting with

Vito Volterra (1982, 1986), Eric Ivar Fredholm (2010), David Hilbert, Erhard Schmidt, etc. scientists began to study it. Nevertheless, within the framework of mathematical concepts that existed before the first half of the twentieth century, such problems were considered incorrect because a small change in the given functions led to a greater change in the desired functions. The Volterra equation of the first kind is an integral equation that has an exact solution only in some cases. The limit of integration has been carried out in very small quantities on non-classical linear and nonlinear integral equations with variable limits and the construction of solutions in these works is based on numerical methods. Therefore, for the so-called non-classical Volterra integral equations, it is relevant to determine the conditions that ensure the uniqueness and regularization of their solutions. In this paper, the uniqueness of the solution of the non-classical nonlinear integral Volterra equation of the first kind is resolved. The aim of the study is to solve the non-classical Volterra integral equation of the first kind, that is, to determine the conditions that ensure the uniqueness of the solution of the nonlinear non-classical Volterra integral equation of the first kind. The proposed methods can be used for the study of integral, integral-differential equations such as the Volterra integral equation of the first kind, as well as for the qualitative study of some applied processes in physics, ecology, medicine, geophysics, and the theory of control of complex systems.

Ключевые слова: интегральные уравнения, искомая функция, единственность, переменные.

Keywords: integral equations, desired function, uniqueness, variables.

Теоретическая часть интегральных уравнений изучалась и исследовалась во многих различных работах. В частности, в работе [1] рассмотрен о полилинейных уравнениях Вольтерра 1 рода. В работе [2, 3] изучаются «О единственности решения операторных уравнений Вольтерра» и «Регуляризация и единственность решений уравнений Вольтерра первого рода».

В работах [4–10] исследованы об решение интегральных уравнений Вольтерра первого рода. В работах [11–14] построен регуляризирующий оператор для решения неклассического интегрального уравнения с условиями Липшица и доказаны теоремы единственности.

В данной работе представлено решение неклассического нелинейного линейного интегрального уравнения Вольтерра первого рода.

Постановка задачи

Рассмотрим

$$\int_{\alpha(t)}^{t} K(t,s,u(s))ds = f(t)\,;\ t\in[t_0,T] \tag{1}$$

где $\alpha(t)\in C[t_0,T]$, $\alpha(t_0)=t_0$, $\alpha(t)\le t$, $f(t)-$ на отрезке $[t_0,T]$ и $K(t,s,u(s))-$ в области $G=\{(t,s):\ \ t_0\le t\le T,\ \ \alpha(t)\le s\le t\}$ $(\tau\le t\ \ \ \alpha(\tau)\le\alpha(t))$ заданные функции. $u(t)-$ искомая функция на отрезке $[t_0,T]$. Требуем выполнения следующих условий:

1^0 $\alpha(t)\in C^1[t_0,T]$, $\alpha'(t)>0$ при почти всех $t\in[t_0,T]$;

2^0 При фиксированным $t\in[t_0,T]$, $K_0(t,s)\in L[\alpha(t),T]$ и $K_0(t,t)\ge m>0$ при почти всех $t\in[t_0,T]$;

3^0 $\forall t,\tau$, $(t>\tau)$ при всех $(t,s),(\tau,s)\in G$, $|K_0(t,\tau)-K_0(s,\tau)|\le L_0|t-s|$, $L_0>0-const$.

4^0 При всех (t,τ,u_1), (s,τ,u_1), (t,τ,u_2) и $(s,\tau,u_2)\in G\times R$, $|K_1(t,\tau,u_2)-K_1(s,\tau,u_2)-K_1(t,\tau,u_1)+K_1(s,\tau,u_1)|\le L_1|t-s||u_1-u_2|$, $L_1>0-const$. $K_1(t,t,u)\equiv 0$ и $K_1(\alpha^{-1}(t),t,u)\equiv 0$, при $\forall(t,u)\in[t_0,T]\times R$, $K_1(t,s,0)\equiv 0$ при $\forall(t,s)\in G$

Решение:

Пусть $K(t,s,u(s))=K_0(t,s)u(s)+K_1(t,s,u(s))$

Тогда уравнение (1) можно представить

$$\int_{\alpha(t)}^{t}K_0(t,s)u(s)ds+\int_{\alpha(t)}^{t}K_1(t,s,u(s))ds=f(t);\ t\in[t_0,T] \tag{2}$$

Наряду с уравнением (2) рассмотрим

$$\varepsilon v(t,\varepsilon)+\int_{\alpha(t)}^{t}K_0(t,s)v(s,\varepsilon)ds+\int_{\alpha(t)}^{t}K_1(t,s,v(s,\varepsilon))ds=f(t)+\varepsilon u(t_0);\ t\in[t_0,T] \tag{3}$$

$0<\varepsilon<1$ некоторый малый параметр. Его решение будем искать в виде

$$v(t,\varepsilon)=u(t)+\xi(t,\varepsilon); \tag{4}$$

где $u(t)$– решение уравнения (2), а $\xi(t,\varepsilon)$– неизвестная функция.

Подставив решение (4) в уравнение (3) и выполнив ряд преобразований [11–14], получим следующее уравнение:

$$\begin{aligned}\xi(t,\varepsilon)=&\int_{t_0}^{\alpha(t)}H_0(t,\tau,\varepsilon)\xi(\tau,\varepsilon)d\tau+\int_{t_0}^{\alpha(t)}H_1(t,\tau,\varepsilon)\xi(\tau,\varepsilon)d\tau+\int_{\alpha(t)}^{t}H_2(t,\tau,\varepsilon)\xi(\tau,\varepsilon)d\tau+\\&+\int_{t_0}^{\alpha(t)}N_0(t,\tau,u(\tau),\xi(\tau,\varepsilon),\varepsilon)d\tau+\int_{t_0}^{\alpha(t)}N_1(t,\tau,u(\tau),\xi(\tau,\varepsilon),\varepsilon)d\tau+\\&+\int_{\alpha(t)}^{t}N_2(t,\tau,u(\tau),\xi(\tau,\varepsilon),\varepsilon)d\tau+U(t,\varepsilon);\ t\in[t_0,T]\end{aligned} \tag{5}$$

где

$$H_0(t,\tau,\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon}K_0(\alpha^{-1}(\tau),\tau)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{\alpha^{-1}(\tau)}^{t}K_0(s,s)ds}; \tag{6}$$

$$\begin{aligned}H_1(t,\tau,\varepsilon)=&-\frac{1}{\varepsilon}e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^{t}K_0(s,s)ds}\left[K_0(t,\tau)-K_0(\tau,\tau)\right]+\frac{1}{\varepsilon}e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{\alpha^{-1}(\tau)}^{t}K_0(s,s)ds}\left[K_0(t,\tau)-K_0(\alpha^{-1}(\tau),\tau)\right]-\\&-\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{\tau}^{\alpha^{-1}(\tau)}K_0(s,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{s}^{t}K_0(\tau,\tau)d\tau}\left[K_0(t,\tau)-K_0(s,\tau)\right]ds;\end{aligned} \tag{7}$$

$$H_2(t,\tau,\varepsilon)=-\frac{1}{\varepsilon}e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t K_0(s,s)ds}\left[K_0(t,\tau)-K_0(\tau,\tau)\right]-\frac{1}{\varepsilon^2}\int_\tau^t K_0(s,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K_0(\tau,\tau)d\tau}\left[K_0(t,\tau)-K_0(s,\tau)\right]ds \tag{8}$$

$$N_0(t,\tau,u(\tau),\xi(\tau,\varepsilon),\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon}e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{\alpha^{-1}(\tau)}^t K_0(s,s)ds}[K_1(t,\tau,u(\tau)+\xi(\tau,\varepsilon))-K_1(t,\tau,u(\tau))] \tag{9}$$

$$N_1(t,\tau,u(\tau),\xi(\tau,\varepsilon),\varepsilon)=-\frac{1}{\varepsilon}e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t K_0(s,s)ds}[K_1(t,\tau,u(\tau)+\xi(\tau,\varepsilon))-K_1(t,\tau,u(\tau))-$$
$$-K_1(\tau,\tau,u(\tau)+\xi(\tau,\varepsilon))+K_1(\tau,\tau,u(\tau))]-\frac{1}{\varepsilon^2}\int_\tau^{\alpha^{-1}(\tau)}K_0(s,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K_0(\tau,\tau)d\tau}[K_1(t,\tau,u(\tau)+\xi(\tau,\varepsilon))-$$
$$-K_1(s,\tau,u(\tau)+\xi(\tau,\varepsilon))-K_1(t,\tau,u(\tau))+K_1(s,\tau,u(\tau))]ds; \tag{10}$$

$$N_2(t,\tau,u(\tau),\xi(\tau,\varepsilon),\varepsilon)=-\frac{1}{\varepsilon}e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t K_0(s,s)ds}[K_1(t,\tau,u(\tau)+\xi(\tau,\varepsilon))-K_1(\tau,\tau,u(\tau)+\xi(\tau,\varepsilon))-$$
$$-K_1(t,\tau,u(\tau))+K_1(\tau,\tau,u(\tau))]-\frac{1}{\varepsilon^2}\int_\tau^t K_0(s,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K_0(\tau,\tau)d\tau}[K_1(t,\tau,u(\tau)+\xi(\tau,\varepsilon))-$$
$$-K_1(s,\tau,u(\tau)+\xi(\tau,\varepsilon))-K_1(t,\tau,u(\tau))+K_1(s,\tau,u(\tau))]ds; \tag{11}$$

$$U(t,\varepsilon)=-[u(t)-u(t_0)]e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^t K_0(s,s)ds}-\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^t K_0(s,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K_0(\tau,\tau)d\tau}[u(t)-u(s)]ds; \tag{12}$$

Далее нам понадобится следующие леммы доказанная в [11-14].

Лемма 1. Если выполняются условия 1^0–2^0, тогда для функции $H_0(t,\tau,\varepsilon)$ определенной по формуле (8) имеет место

$$\int_{t_0}^{\alpha(t)}|H_0(t,\tau,\varepsilon)|d\tau\le\gamma_0;\ t\in[t_0,T] \tag{13}$$

где $\gamma_0=\sup\limits_{\nu\in[t_0,T]}\dfrac{|K_0(\nu,\alpha(\nu))|\alpha'(\nu)}{|K_0(\nu,\nu)|}$.

Лемма 2. Пусть $H_1(t,\tau,\varepsilon)$ и $H_2(t,\tau,\varepsilon)$ определены по формулами (9), (10) соответственно. Кроме того выполняются условия 1^0-3^0. Тогда справедливы оценки

$$1)\ |H_1(t,\tau,\varepsilon)|\le\frac{L_0}{m}(2e^{-1}+1),\ (t,\tau)\in G_1=\{(t,\tau):\ \ t_0\le t\le T,\quad t_0\le\tau\le\alpha(t)\} \tag{14}$$

$$2)\ |H_2(t,\tau,\varepsilon)|\le\frac{L_0}{m},\ (t,\tau)\in G=\{(t,\tau):\ \ t_0\le t\le T,\quad \alpha(t)\le\tau\le t\}; \tag{15}$$

Лемма 3. Пусть выполняется 1^0–2^0 и функция $U(t,\varepsilon)$ $(\varepsilon>0)$ определена формулой (14). Тогда:

1) Если $u(t)\in C[t_0,T]$, то на отрезке $[t_0,T]$ справедлива оценка

Т. 9. №12. 2023
https://doi.org/10.33619/2414-2948/97

$$\|U(t,\varepsilon)\|_C \le 3\|u(t)\|_C e^{-\frac{1}{\varepsilon^{1-\beta}}} + \omega_u(\varepsilon^\beta) = C_0(\varepsilon); \; 0<\beta\le 1, \tag{16}$$

где $\omega_u(\delta) = \sup\limits_{|t-s|\le\delta} |u(t)-u(s)|$;

2) Если $u(t)\in C^\gamma[t_0,T]$, $0<\gamma\le 1$, то на отрезке $[t_0,T]$ справедлива оценка

$$\|U(t,\varepsilon)\|_C \le C_0 C_\gamma \gamma \varepsilon^\gamma, \tag{17}$$

где $C_\gamma = \sup\limits_{t,s\in[t_0,T]} \dfrac{|u(t)-u(s)|}{|t-s|^\gamma}$; $C_0 = \int\limits_0^\infty e^{-m\tau}\tau^{\gamma-1}d\tau$.

Лемма 4. Пусть выполняются условия $1^0, 2^0$ и 4^0 функции $N_0(t,\tau,u(\tau),\xi(\tau,\varepsilon),\varepsilon)$, $N_1(t,\tau,u(\tau),\xi(\tau,\varepsilon),\varepsilon)$ и $N_2(t,\tau,u(\tau),\xi(\tau,\varepsilon),\varepsilon)$ определены соответственно формулами (11), (12) и (13). Тогда имеют места следующие неравенства

$$1)\; |N_0(t,\tau,u(\tau),\xi(\tau,\varepsilon),\varepsilon)| \le \frac{L_1 e^{-1}}{m}|\xi(\tau,\varepsilon)|; \tag{18}$$

$$2)\; |N_1(t,\tau,u(\tau),\xi(\tau,\varepsilon),\varepsilon)| \le \frac{L_1}{m}\left(\frac{e^{-1}}{m} + 2e^{-1} + 1\right)|\xi(\tau,\varepsilon)|; \tag{19}$$

$$3)\; |N_2(t,\tau,u(\tau),\xi(\tau,\varepsilon),\varepsilon)| \le \frac{L_1}{m}|\xi(\tau,\varepsilon)|. \tag{20}$$

Доказательство. Если переходить к оценке в (11), (12) и (13) соответственно с учетом условий леммы, получаем требуемые оценки.

$$|N_0(t,\tau,u(\tau),\xi(\tau,\varepsilon),\varepsilon)| = \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\alpha^{-1}(\tau)}^{t} K_0(\tau,\tau)d\tau} |K_1(t,\tau,u(\tau)+\xi(\tau,\varepsilon)) -$$

$$- K_1(\alpha^{-1}(\tau),\tau,u(\tau)+\xi(\tau,\varepsilon)) - K_1(t,\tau,u(\tau)) + K_1(\alpha^{-1}(\tau),\tau,u(\tau))| \le$$

$$\le \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{m}{\varepsilon}(t-\alpha^{-1}(\tau))} L_1(t-\alpha^{-1}(\tau))|\xi(\tau,\varepsilon)| \le \sup_{v\ge 0} e^{-mv} v |\xi(\tau,\varepsilon)| L_1 \le \frac{L_1}{m} e^{-1}|\xi(\tau,\varepsilon)|.$$

$$|N_1(t,\tau,u(\tau),\xi(\tau,\varepsilon),\varepsilon)| \le \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{m}{\varepsilon}(t-\tau)} L_1(t-\tau)|\xi(\tau,\varepsilon)| +$$

$$+\frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_\tau^{\alpha^{-1}(\tau)} K_0(s,s) e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_s^t K_0(\tau,\tau)d\tau} L_1(t-s)|\xi(\tau,\varepsilon)|ds = \left| \begin{matrix} u=t-s, & dv = \frac{1}{\varepsilon}K_0(s,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_s^t K_0(\tau,\tau)d\tau} ds, \\ du=-ds, & v = e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_s^t K_0(\tau,\tau)d\tau} \end{matrix} \right| \le$$

$$\le \frac{L_1}{m}\sup_{v\ge 0}[e^{-mv}v] + \frac{1}{\varepsilon}(t-s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_s^t K_0(\tau,\tau)d\tau} L_1\Big|_{s=\tau}^{s=\alpha^{-1}(\tau)} + \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_\tau^{\alpha^{-1}(\tau)} L_1 e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_s^t K_0(\tau,\tau)d\tau} ds \le$$

$$\le \left\{ \frac{L_1 e^{-1}}{m^2} + L_1\left[\frac{t-\alpha^{-1}(\tau)}{\varepsilon} e^{-\frac{m}{\varepsilon}(t-\alpha^{-1}(\tau))} + \frac{t-\tau}{\varepsilon} e^{-\frac{m}{\varepsilon}(t-\tau)}\right] + \frac{L_1}{\varepsilon}\int\limits_\tau^{\alpha^{-1}(\tau)} e^{-\frac{m}{\varepsilon}(t-s)} ds \right\} |\xi(\tau,\varepsilon)| \le$$

$$\le \left[\frac{L_1 e^{-1}}{m^2} + 2L_1 \sup_{v\ge 0}(e^{-mv}v) + \frac{L_1}{\varepsilon}\frac{\varepsilon}{m}\left(e^{-\frac{m}{\varepsilon}(t-\alpha^{-1}(\tau))} - e^{-\frac{m}{\varepsilon}(t-\tau)}\right)\right] |\xi(\tau,\varepsilon)| \le \frac{L_1}{m}\left(\frac{e^{-1}}{m} + 2e^{-1} + 1\right)|\xi(\tau,\varepsilon)|;$$

$$|N_2(t,\tau,u(\tau),\xi(\tau,\varepsilon),\varepsilon)| \le \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t K_0(\tau,\tau)d\tau} L_1(t-\tau)|\xi(\tau,\varepsilon)| + \frac{1}{\varepsilon^2}\int_\tau^t K_0(s,s) e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t K_0(\tau,\tau)d\tau} \times$$

$$\times L_1(t-s)|\xi(\tau,\varepsilon)|ds \le \begin{vmatrix} u=t-s, & dv = \frac{1}{\varepsilon}K_0(s,s)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K_0(\tau,\tau)d\tau} ds, \\ du=-ds, & v = e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K_0(\tau,\tau)d\tau} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t K_0(\tau,\tau)d\tau} L_1(t-\tau)|\xi(\tau,\varepsilon)| + \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K_0(\tau,\tau)d\tau} L_1(t-s)|\xi(\tau,\varepsilon)|\Big|_{s=\tau}^{s=t} +$$

$$+ \frac{1}{\varepsilon} L_1 \int_\tau^t e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t K_0(\tau,\tau)d\tau} ds |\xi(\tau,\varepsilon)| \le \frac{L_1}{\varepsilon}\int_\tau^t e^{-\frac{m}{\varepsilon}(t-s)} ds \le \frac{L_1}{m}|\xi(\tau,\varepsilon)|.$$

И так сформулируем основные результаты.

Теорема. Пусть выполняются условия 1^0–4^0 и $\beta_1 = \gamma_0 e^{M(T-t_0)} < 1$, где

$$\gamma_0 = \sup_{\upsilon\in[t_0,T]} \frac{|K_0(\upsilon,\alpha(\upsilon))|\alpha'(\upsilon)}{K_0(\upsilon,\upsilon)}, \ M = \frac{2L_0}{m}(e^{-1}+1) + \frac{L_1}{m}\left(\frac{e^{-1}}{m} + 3e^{-1} + 2\right).$$

Тогда: 1) Если уравнение (1) имеет решение $u(t)$ в пространстве $C[t_0,T]$, то решение $v(t,\varepsilon)$ уравнения (2) при $\varepsilon \to 0$ сходится по норме $C[t_0,T]$ к решению $u(t)$ и справедлива оценка

$$\|v(t,\varepsilon) - u(t)\|_C \le \frac{e^{M(T-t_0)}}{1-\beta_1}\left[3\|u(t)\|_C e^{-\frac{1}{1-\beta}} + w_u(\varepsilon^\beta)\right]. \tag{21}$$

где $w_u(\varepsilon^\beta) = \sup_{|t-s|\le\varepsilon^\beta} |u(t)-u(s)|$;

2) Если уравнение (1) имеет решение $u(t)$ в пространстве $C^\gamma[t_0,T]$, $(0<\gamma\le 1)$ то решение $v(t,\varepsilon)$ уравнения (2) при $\varepsilon \to 0$ сходится по норме $C[t_0,T]$ к решению $u(t)$ и справедлива оценка

$$\|v(t,\varepsilon) - u(t)\|_C \le \frac{e^{M(T-t_0)}}{1-\beta_1} C_0 C_\gamma \gamma \varepsilon^\gamma, \tag{22}$$

где $C_0 = \int_0^\infty e^{-m\tau}\tau^{\gamma-1}d\tau$, $C_\gamma = \sup_{t,s\in[t_0,T]} \frac{|u(t)-u(s)|}{|t-s|^\gamma}$.

Доказательство. В силу лемм 1–4 из (7) имеем:

$$|\xi(t,\varepsilon)| \le \int_{t_0}^{\alpha(t)} |H_0(t,\tau,\varepsilon)||\xi(\tau,\varepsilon)|d\tau + \int_{t_0}^{\alpha(t)} |H_1(t,\tau,\varepsilon)||\xi(\tau,\varepsilon)|d\tau + \int_{\alpha(t)}^{t} |H_2(t,\tau,\varepsilon)||\xi(\tau,\varepsilon)|d\tau +$$

$$+ \int_{t_0}^{\alpha(t)} |N_0(t,\tau,u(\tau),\xi(\tau,\varepsilon),\varepsilon)|d\tau + \int_{t_0}^{\alpha(t)} |N_1(t,\tau,u(\tau),\xi(\tau,\varepsilon),\varepsilon)|d\tau +$$

$$+ \int_{\alpha(t)}^{t} |N_2(t,\tau,u(\tau),\xi(\tau,\varepsilon),\varepsilon)|d\tau + |U(t,\varepsilon)|; \ t\in[t_0,T];$$

$$|\xi(t,\varepsilon)| \le \gamma_0 \|\xi(\tau,\varepsilon)\|_C + \int_{t_0}^{\alpha(t)} [\frac{L_0}{m}(2e^{-1}+1)+\frac{L_0}{m}]|\xi(\tau,\varepsilon)|d\tau +$$

$$+\int_{t_0}^{\alpha(t)} [\frac{L_1 e^{-1}}{m}+\frac{L_1}{m}(\frac{e^{-1}}{m}+2e^{-1}+1)+\frac{L_1}{m}]|\xi(\tau,\varepsilon)|d\tau + U(t,\varepsilon) \;\; t\in[t_0,T];$$

Отсюда для $\forall t \in [t_0, T]$ получим

$$\|\xi(t,\varepsilon)\|_C \le \gamma_0 \|\xi(t,\varepsilon)\|_C + \int_{t_0}^{t} M|\xi(\tau,\varepsilon)|d\tau + |U(t,\varepsilon)|$$

где $M = \frac{2L_0}{m}(e^{-1}+1)+\frac{L_1}{m}(\frac{e^{-1}}{m}+3e^{-1}+2)$

Применяя к этому неравенству неравенство Гронулла-Бельмана, мы получаем следующее неравенство:

$$\|\xi(t,\varepsilon)\|_C \le \gamma_0 e^{M(T-t_0)} \|\xi(t,\varepsilon)\|_C + e^{M(T-t_0)} \|U(t,\varepsilon)\|_C$$

Из этого следует (23) на основе леммы 3. Теорема доказана.

Заключение

Поставленная задача полностью разрешена, т. е. решение неклассического нелинейного интегрального уравнения является единственным и построен оператор регуляризации.

Список литературы:

1. Апарцин А. С. О полилинейных уравнениях Вольтерра I рода //Автоматика и телемеханика. 2004. №2. С. 118-125. EDN: NQTYFH

2. Асанов А. О единственности решения операторных уравнений Вольтерра // Известия АН Киргизской ССР. 1988. Т. 1. С. 13-18.

3. Асанов А. Регуляризация и единственность решений уравнений Вольтерра первого рода: дисс. ... канд. физ.-мат. наук. Новосибирск, 1982. 91 с.

4. Бухгейм А. Л. Об одном классе операторных уравнений Вольтерра первого рода // Функциональный анализ и его приложения. 1972. Т. 6. №1. С. 1-9. https://doi.org/10.1007/BF01075502

5. Денисов А. М. О приближенном решении уравнения Вольтерра I рода // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1975. Т. 15. №4. С. 1053-1056. https://doi.org/10.1016/0041-5553(75)90185-8

6. Иманалиев М. И., Асанов А. О решениях систем нелинейных двумерных интегральных уравнений Вольтерра первого рода // Доклады Академии наук. 1991. Т. 317. №1. С. 32-35.

7. Иманалиев М. И. Обобщенные решения интегральных уравнений первого рода. Фрунзе: Илим, 1981. 144 с.

8. Лаврентьев М. М. Об интегральных уравнениях первого рода // ДАН СССР. 1959. Т. 127. №1. С. 31-33.

9. Магницкий Н. А. Линейные интегральные уравнения Вольтерра I и III рода // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1979. Т. 19. №4. С. 970-988. https://doi.org/10.1016/0041-5553(79)90166-6

10. Цалюк З. Б. Интегральные уравнения Вольтерра // Итоги науки и техники. Серия

Математический анализ. 1977. Т. 15. №0. С. 131-198. https://doi.org/10.1007/BF01844490

11. Асанов А., Чоюбеков С. М. Регуляризация решения нелинейных уравнений Вольтерра I рода с условиями Липшица // Точная наука. 2018. №23. С. 6-11. UPGRGU

12. Асанов А. А., Чоюбеков С. М. Решение неклассических интегральных уравнений Вольтерра I рода с вырожденным нелинейным ядром // Международный научно-исследовательский журнал. 2018. №4 (70). С. 134-138. https://doi.org/10.23670/IRJ.2018.70.029

13. Асанов А., Чоюбеков С. М. О решении линейных неклассических интегральных уравнений Вольтерра первого рода // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. 2020. №1. С. 3-8. https://doi.org/10.26104/NNTIK.2019.45.557

14. Чоюбеков С. М. Регуляризация решения неклассического интегрального уравнения со условиями Липшица // Молодой ученый. 2016. №8. С. 34-38. EDN: VWFZHJ

References:

1. Apartsin, A. S. (2004). O polilineinykh uravneniyakh Volterra I roda. *Avtomatika i telemekhanika,* (2), 118-125. (in Russian).

2. Asanov, A. (1988). O edinstvennosti resheniya operatornykh uravnenii Volterra. *Izvestija AN Kirgizskoi SSR, 1,* 13-18. (in Russian).

3. Asanov, A. (1982). Regulyarizatsiya i edinstvennost' reshenii uravnenii Volterra pervogo roda: diss. ... kand. fiz.-mat. nauk. Novosibirsk. (in Russian).

4. Bukhgeim, A. L. (1972). Ob odnom klasse operatornykh uravnenii Volterra pervogo roda. *Funkcionalnyi analiz i ego prilozheniya, 6*(1), 1-9. (in Russian). https://doi.org/10.1007/BF01075502

5. Denisov, A. M. (1975). O priblizhennom reshenii uravneniya Volterra I roda. *Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki, 15*(4), 1053-1056. (in Russian). https://doi.org/10.1016/0041-5553(75)90185-8

6. Imanaliev, M. I., & Asanov, A. (1991). O resheniiakh sistem nelineinykh dvumernykh integral'nykh uravnenii Volterra pervogo roda. In *Doklady Akademii nauk* (Vol. 317, No. 1, pp. 32-35). (in Russian).

7. Imanaliev M. I. (1981). Obobshhennye resheniya integral'nykh uravnenii pervogo roda. Frunze. (in Russian).

8. Lavrentev, M. M. (1959). Ob integral'nykh uravneniyakh pervogo roda. *DAN SSSR, 127*(1), 31-33. (in Russian).

9. Magnitskii, N. A. (1979). Lineinye integral'nye uravneniya Volterra I i III roda. *Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki, 19*(4), 970-988. (in Russian). https://doi.org/10.1016/0041-5553(79)90166-6

10. Tsalyuk, Z. B. (1977). Integral'nye uravneniya Volterra. *Itogi nauki i tehniki. Seriya Matematicheskii analiz, 15*(0), 131-198. (in Russian). https://doi.org/10.1007/BF01844490

11. Asanov, A., & Choyubekov, S. M. (2018). Regulyarizatsiya resheniya nelineinykh uravnenii Volterra I roda s usloviyami Lipshhitsa. *Tochnaya nauka,* (23), 6-11. (in Russian).

12. Asanov, A. A., & Choyubekov, S. M. (2018). Reshenie neklassicheskikh integral'nykh uravnenii Volterra I roda s vyrozhdennym nelineinym yadrom. *Mezhdunarodnyi nauchno-issledovatel'skii zhurnal,* (4 (70)), 134-138. (in Russian). https://doi.org/10.23670/IRJ.2018.70.029

13. Asanov, A., & Choyubekov, S. M. (2020). O reshenii lineinykh neklassicheskikh integral'nykh uravnenii Volterra pervogo roda. *Nauka, novye tehnologii i innovatsii Kyrgyzstana,* (1), 3-8. (in Russian). https://doi.org/10.26104/NNTIK.2019.45.557

14. Choyubekov, S. M. (2016). Regulyarizatsiya resheniya neklassicheskogo intergal'nogo uravneniya s usloviyami Lipshitsa. *Molodoi uchenyi,* (8), 34-38. (in Russian).

Работа поступила в редакцию 18.11.2023 г.

Принята к публикации 24.11.2023 г.

Ссылка для цитирования:

Чоюбеков С. М., Чоюбекова А. М. Регуляризация решения нелинейного интегрального уравнения первого рода // Бюллетень науки и практики. 2023. Т. 9. №12. С. 30-38. https://doi.org/10.33619/2414-2948/97/03

Cite as (APA):

Choyubekov, S., & Choyubekova, A. (2023). Regularization of the Solution of a Nonlinear Integral Equation of the First Kind. *Bulletin of Science and Practice, 9*(12), 30-38. (in Russian). https://doi.org/10.33619/2414-2948/97/03