УДК 517.928 https://doi.org/10.33619/2414-2948/97/02

РАСЩЕПЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ СЛАБО НЕЛИНЕЙНЫХ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ УРАВНЕНИЙ ПРИ РЕГУЛЯРНОМ ВЫРОЖДЕНИИ

*©**Алыбаев К. С.,** ORCID: 0000-0002-7962-534X, SPIN-код: 2396-5503,
д-р физ.-мат. наук, Жалал-Абадский государственный университет,
г. Джалал-Абад, Кыргызстан, alybaevkurmanbek@rambler.ru*
*©**Мусакулова Н. К.,** ORCID: 0009-0002-8805-331X, SPIN-код: 4710-0522,
Жалал-Абадский государственный университет,
г. Джалал-Абад, Кыргызстан, kuralbekovna79@inbox.ru*

SPLITTING OF SOLUTIONS OF WEAKLY NONLINEAR SINGULARLY PERTURBED EQUATIONS UNDER REGULAR DEGENERATION

*©**Alybaev K.,** ORCID: 0000-0002-7962-534X, SPIN-code: 2396-5503, Dr. habil.,
Jalal-Abad State University Kyrgyzstan, Jalal-Abad, Kyrgyzstan, alybaevkurmanbek@rambler.ru*
*©**Musakulova N.,** ORCID: 0009-0002-8805-331X, SPIN code: 4710-0522, Jalal-Abad State
University Kyrgyzstan, Jalal-Abad, Kyrgyzstan, kuralbekovna79@inbox.ru*

Аннотация. Рассматривается слабо нелинейное сингулярно возмущенное уравнение в комплексных областях. Поставлена задача о возможности расщепления уравнения на несколько составляющих. Введением новых неизвестных функций, получена система из двух уравнений. Далее исследовано асимптотическое поведение решений полученных уравнений в комплексных областях. Доказано, что решение каждого из этих уравнений является доминирующим в определенных частях рассматриваемых областей. Решение одного из этих уравнений определяет пограничные линии и области, а решение другой системы определяет регулярную область.

Abstract. We consider a weakly nonlinear singularly perturbed equation in complex domains. The problem is posed about the possibility of splitting the equation into several components. By introducing new unknown functions, a system of two equations is obtained. Next, the asymptotic behavior of solutions of the resulting equations in complex domains is studied. It has been proven that the solution to each of these equations is dominant in certain parts of the areas under consideration. The solution of one of these equations determines the boundary lines and regions, and the solution of the other system determines the regular region.

Ключевые слова: сингулярно возмущенные уравнения, аналитические функции, гармонические функции, расщепление, линии уровня, погранслойные линии и области, регулярная область, сходимость, последовательные приближения, асимптотическая оценка.

Keywords: singularly perturbed equations, analytical functions, harmonic functions, splitting, level lines, boundary layer lines and regions, regular region, convergence, successive approximations, asymptotic estimate.

Асимптотическое поведение решений сингулярно возмущенных уравнений исследованы в работах [1–3]. В работе [4] проведен обзор развития теории сингулярно возмущенных уравнений с аналитическими функциями, а в [5] определены понятия погранслойные линии, области, регулярные и сингулярные области. Во всех перечисленных работах исследования проведены без расщепления решений. В данной работе решим задачу о возможности расщепления решений сингулярно возмущенных уравнений.

Постановка задачи

Пусть рассматривается уравнение

$$\varepsilon z'(t,\varepsilon) = a(t)z(t,\varepsilon) + \varepsilon b(t) + \varepsilon f\big(t, z(t,\varepsilon)\big). \tag{1}$$

с начальным условием

$$z(t_0,\varepsilon) = z^0, \tag{2}$$

где $0 < \varepsilon$ — вещественный параметр; $t \in D \subset C$ и D односвязная, открытая и ограниченная область, $z(t,\varepsilon)$ — скалярная функция, $t = t_1 + it_2$, t_1, t_2 — действительные переменные, $i = \sqrt{-1}$, $t_0 = t_{10} + it_{20}$.

Относительно правых частей (1) предположим выполнимость следующих условий:

У1. $a(t), b(t) \in A(D)$ – пространство аналитических функций в области D.

1. Для $a(t)$ возможны различные случаи. В частности $a(t)$ в области D может иметь конечное число нулей и полюсов. Для простоты рассмотрим только случай: У2. $\forall t \in D\ (a(t) \neq 0)$.

У3. $f(t,0) \equiv 0, f(t,x) \in Q(H)$, где $H = \{(t,x), t \in D, |x| \leq M_1\}$, здесь и далее буквами M_1, M_2... будем обозначать положительные постоянные не зависящие от ε, причем $|x^0| < M_1$.

У4. $\forall \left((t,\tilde{x}), (t,\tilde{\tilde{x}})\right) \in H\ \left(\left|f(t,\tilde{x}) - f\left(t,\tilde{\tilde{x}}\right)\right| \leq M_2\left|\tilde{x} - \tilde{\tilde{x}}\right|\right)$.

Задача. Расщепить решение задачи (1) – (2) на несколько составляющих и исследовать их асимптотическое поведение в области D.

2. Задачу решим при условии У1, У2, У3, У4.

Определение 1.Если выполняется условие У2, то будем говорить, что все точки области D являются простыми. Невозмущенное уравнение, соответствующее (1), имеет решение $\xi \equiv 0$ и это решение не имеет особенностей.

Решение задачи

Решение задачи разделим на несколько частей.

1. Расщепление решения.

В (1) введем новые неизвестные функции следующим образом

$$z(t,\varepsilon) = \Pi(t,\varepsilon) + x(t,\varepsilon), \tag{3}$$

где $\Pi(t,\varepsilon), x(t,\varepsilon)$ – новые неизвестные функции. (3) подставляя в (1) получим следующее уравнение:

$$\varepsilon\Pi'(t,\varepsilon) + \varepsilon x'(t,\varepsilon) == a(t)\Pi(t,\varepsilon) + a(t)x(t,\varepsilon) + \varepsilon b(t) + \varepsilon\big(f(t,\Pi(t,\varepsilon) + x(t,\varepsilon)\big)$$

Уравнение (3) расщепим на следующую систему (аргументы неизвестной функции будем опускать)

$$\varepsilon\Pi' = a(t,)\Pi + \varepsilon f(t,\Pi), \tag{4}$$
$$\Pi(t_0, \quad \varepsilon) = x^0,$$

$$\varepsilon x' = a(t)x + \varepsilon b(t) + \varepsilon[f(t,\Pi + x) - f(t,\Pi)],$$
$$x(t_0,\varepsilon) = 0. \qquad (5)$$

Далее займемся исследованием асимптотического поведения решений уравнений (4)-(5) с заданными начальными условиями. Для этого (4) – (5) заменим системой интегральных уравнений

$$\Pi = x^0 exp\frac{A(t)}{\varepsilon} + \int_{t_0}^{t} f(\tau,\Pi)exp\frac{A(t)-A(\tau)}{\varepsilon}d\tau, \qquad (6)$$

$$x = \int_{t_0}^{t}[b(\tau)f(\tau,\Pi + x) - f(\tau,\Pi)]exp\frac{A(t)-A(\tau)}{\varepsilon}\,d\tau, \qquad (7)$$

где $A(t) = \int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau$. Заметим, функция $A(t)$ в точке $t = t_0$ имеет простой нуль. Прежде чем исследовать асимптотическое поведение решений (6)-(7) проведем некоторые геометрические построения.

Геометрические построения

Возьмем функцию $A(t)$ и рассмотрим $ReA(t), ImA(t)$.

Определение 2. Множество $(p) = \{t \in D, ReA(t) = p - const\}$ назовем линия уровня функции $ReA(t)$.

Далее все геометрические построения будут проведены с использованием линии уровней функций $ReA(t)$ и $ImA(t)$.

Аналогично определяется линия уровня $ImA(t)$, которую обозначим (q).

Введем в рассмотрение линию уровня $(p_0) = \{t \in D, ReA(t) = 0\}$.

Поскольку $A(t_0) = 0$, то линия (p_0) проходит через точку t_0. Согласно У2 все точки D являются простыми т. е. функция *A(t)* в D не имеет кратных точек. Тогда через любую точку области D проходит единственная линия уровня функций $ReA(t), ImA(t)$. Линии уровня, $ReA(t), ImA(t)$, в точках пересечения взаимно ортогональны [6, 7]. Отсюда следует, область D покрывается сетью взаимно ортогональных линий уровня функций $ReA(t), ImA(t)$ (Рисунок 1). Область D открытая, тогда существует сетка содержащая точку t_0 (Рисунок 2).

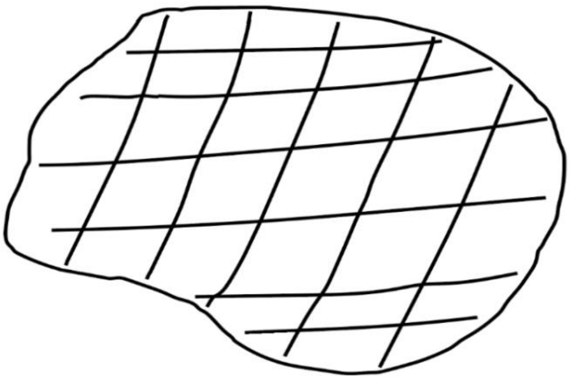

Рисунок 1. Покрытие области D

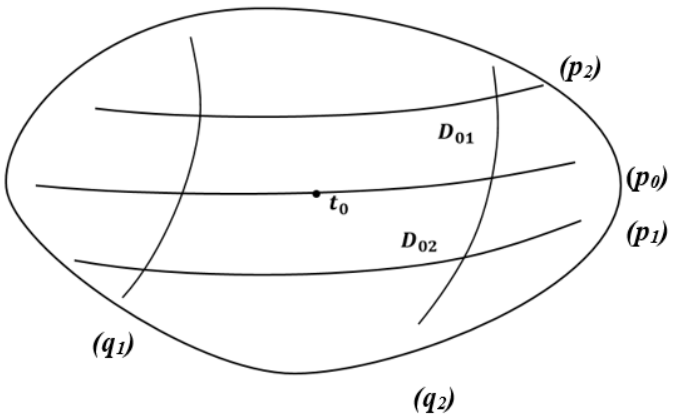

Рисунок 2. Сетка образованная линиями уровней $(p), (q)$

Сетку обозначим D_0. Линией уровня (p_0) сетка D разделяется на части D_{01} и D_{02} (Рисунок 2). На части линии $(p_0) \subset D_0$ возьмем произвольную точку $\tilde{t}$ и проведем линию $(\tilde{q})$. Функцию $ReA(t)$ рассмотрим вдоль $(\tilde{q})$. Известно [6, 7] вдоль $(\tilde{q})$ функция $ReA(t)$ строго монотонна. Если учесть $ReA(\tilde{t}) = 0$, то справедливы следующие соотношения

$$\big(\forall t \in D_{01}\ (ReA(t) \le 0) \wedge \forall t \in D_{02}(ReA(t) \ge 0)\big)\ \vee$$
$$\vee\ \big(\forall t \in D_{01}\ (ReA(t) \ge 0) \wedge \forall t \in D_{02}(ReA(t) \le 0)\big),$$

Причем равенство имеет место только на границе (p_0).

Поскольку полученные соотношения равнозначны, то не ограничивая общности будем считать

$$\forall t \in D_{01}\ (ReA(t) \le 0) \wedge \forall t \in D_{02}(ReA(t) \ge 0)$$

Для дальнейших исследований возьмем часть D_{01} и выберем пути интегрирования для (6)-(7).

$\forall t \in D_{01}$ путь интегрирования состоит из части: $(p_0)[t_0, \tilde{t}]$; $(\tilde{q})[\tilde{t}, t]$. Запись $(l)[T_1,\ T_2]$ – означает часть кривой (l) соединяющий точки T_1 и T_2. Отметим, по выбранным путям интегрирования $ReA(t)$ не возростает. Определим линию уровня

$$(p_\varepsilon) = \{t \in D_{01}, ReA(t) = \varepsilon ln\varepsilon\}.$$

Линия (p_ε) разделяет область D_{01} на части $D_{01}^{\varepsilon}, D_{01}^{1}$, причем будем считать $(p_\varepsilon) \in D_{01}^{1}, (p_0) \notin D_{01}^{\varepsilon}$ (Рисунок 3).

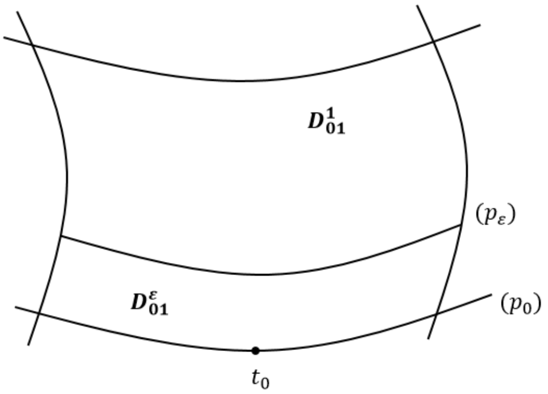

Рисунок 3. Области $D_{01}^{\varepsilon}, D_{01}^{1}$.

Исследование асимптотического поведения решений уравнений (6) и (7)

Асимптотическое поведение решений уравнений (6)-(7) в области D_{01} выражается следующей теоремой.

Теорема. Пусть выполняются условия У1-У4. Тогда $\forall t \in D_{01}$ существуют решения уравнений (6), (7) и для них справедливы оценки

$$|\Pi(t,\varepsilon)| \le M_5 exp\frac{ReA(t)}{\varepsilon}, t \in (p_0) \cup D_{01}^{\varepsilon} \cup D_{01}^{1};$$
$$|x(t,\varepsilon)| \le M_7\varepsilon, \forall t \in D_{01}.$$

Справедливость теоремы устанавливается применением метода последовательных приближений к (6) и (7).

Последовательные приближения определяются так

$$\Pi_m = x^0 exp\frac{A(t)}{\varepsilon} + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \Pi_{m-1}) exp\frac{A(t)-A(\tau)}{\varepsilon} d\tau, \tag{8}$$

$$\Pi_0(t,\varepsilon) \equiv 0, m = 1, 2, \dots .$$

$$x_m = \int_{t_0}^{t} [b(\tau) + f(\tau, \Pi + x_{m-1}) - f(\tau, \Pi)] exp\frac{A(t)-A(\tau)}{\varepsilon} d\tau, \tag{9}$$

$$x_0(t,\varepsilon) \equiv 0, m = 1, 2, \dots .$$

(8) и (9) оцениваются $\forall t \in D_{01}$, согласно выбранных путей интегрирования и доказывается их равномерная сходимость. Заметим, что линии уровня, определяемые гармоническими функциями, являются аналитическими кривыми и их уравнения можно представить параметрическими.

Пусть $\tau_1 = \tau_1(s), \tau_2 = \tau_2(s), 0 \le s \le s_0$ параметрическое уравнениелинии уровня (p_0), а s-длина кривой (p_0) от точки t_0 до точки

$\tau = \tau_1 + i\tau_2$; $\tau_1 = \tau_1(\sigma)$, $\tau_2 = \tau_2(\sigma)$, $0 \le \sigma \le \sigma_0$ параметрическое уравнение линии уровня (q) проходящая через точки $\tilde{t}$ и τ.

Сначала проведем оценку последовательных приближений (8).

Пусть $t \in (p_0). \forall t \in (p_0)$ $(ReA(t) = 0) \Rightarrow |\Pi_1| \le |x^0|$.

Из (8), учитывая У4 получим

$|\Pi_2| \le |x^0| + M_2 \int_0^{\tilde{s}} |\Pi_1||\tau_1'(s) + i\tau_2'(s)|\, ds \le |x^0| + M_2|x^0| \cdot M_0\tilde{s}(|\tau_1'(s) + +i\tau_2'(s)| \le M_0)$, $|\Pi_2| \le |x^0| + M_{\,2} M_0 |x^0|\tilde{s}$.

Для выполнимости У4 положим $|x^0| + |x^0| M_0 M_{\,2}\tilde{s} \le M_1$.

Отсюда имеем

$$\tilde{s} \le \frac{M_1 - |x^0|}{|x^0| \cdot M_0 M_{\,2}}. \tag{10}$$

Учитывая (10) получим

$$|\Pi_2| \le M_1.$$

Для Π_3 имеем

$$|\Pi_3| \le |x^0| + M_2 M_0 \int_0^{\tilde{s}} |\Pi_1| ds \le |x^0| + M_{\,2} M_0 \int_0^{\tilde{s}} (|x^0| + |x^0|\, M_0 M_2 s) ds \le$$

$$\le |x^0| + M_{\,2} M_0 |x^0| \tilde{s} + (M_{\,2} M_0)^2 \frac{\tilde{s}^2}{2!} = |x^0| \left(1 + M_3 \tilde{s} + \frac{(M_3\tilde{s})^2}{2!}\right), \qquad \text{где } M_{\,2} M_0 \equiv M_{\,3}.$$

Пусть справедлива оценка

$$|\Pi_m| \le |x^0| \textstyle\sum_{k=0}^{m-1} \frac{(M_3\tilde{s})^k}{k!}. \tag{11}$$

Учитывая (11) из (8) получим

$$|\Pi_{m+1}| \le |x^0| + M_3 |x^0| \int_0^{\tilde{s}} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(M_3\tilde{s})^k}{k!} ds \le |x^0| + |x^0| \sum_{k=0}^{m} \frac{(M_3\tilde{s})^k}{k!} = = \sum_{k=0}^{m} \frac{(M_3\tilde{s})^k}{k!}$$

Т. 9. №12. 2023
https://doi.org/10.33619/2414-2948/97

Справедливость оценки (11) доказана.

Оценку (11) можно заменить следующим

$$|\Pi_m| \leq |x^0| exp M_3 \tilde{s} \tag{12}$$

При получении оценок для $|\Pi_m|$ мы формально предположим выполнимость условия У3. Освободиться от этого формализма можно, положив

$$|x^0| exp M_3 \tilde{s} \leq M_1 \text{ или } \qquad \tilde{s} \leq \frac{1}{M_3} ln \frac{M_1}{|x^0|}. \tag{13}$$

Далее, не ограничивая общности, будем считать, что неравенство (10) выполняется для части (p_0) содержащегося в D_{01} так как раздвигая границы D_{01} можно обеспечить выполнимость (13). Таким образом все вышепроведенные операции законны и полученные оценки справедливы. Если учесть (13) то имеем

$$|\Pi_m| \leq M_1, m = 0, 1, \ldots \tag{14}$$

Теперь докажем равномерную сходимость (8) для $t \in (p_0)$. Учитывая У4 имеем

$$|\Pi_2 - \Pi_1| \leq M_2 M_0 \int_0^{\tilde{s}} |\Pi_1| ds \leq M_3 M_1 \tilde{s}.$$

Далее

$$|\Pi_3 - \Pi_2| \leq M_3 \int_0^{\tilde{s}} |\Pi_2 - \Pi_1| ds \leq M_1 M_3^2 \frac{\tilde{s}^2}{2!}.$$

Продолжая процесс получим

$$|\Pi_m - \Pi_{m-1}| \leq M_1 \frac{(M_3 \tilde{s})}{(m-1)!}.$$

Из полученных оценок вытекает, равномерная сходимость последовательных приближений $\forall t \in (p_0)$ к некоторй функции $\Pi(\mathrm{t}, \varepsilon)$, которая является решением (6). Если учесть (14), то для этого решения справедлива оценка

$$|\Pi(\mathrm{t}, \varepsilon)| \leq M_1, t \in (p_0) \tag{15}$$

Пусть $t \in D_{01}^{\varepsilon}$. Согласно выбранных путей интегрирования (6) представим в виде

$$\Pi = x^0 exp \frac{A\big(t(\tilde{\sigma})\big)}{\varepsilon} + \int_0^{\tilde{s}} f(\tau, \Pi) exp \frac{A\big(t(\tilde{\sigma})\big) - A\big(\tau(s)\big)}{\varepsilon} * \big(\tau_1'(s) + i\tau_2'(s)\big) ds + \\ + \int_0^{\tilde{\tau}} f(\tau, \Pi) exp \frac{A\big(t(\tilde{\sigma})\big) - A\big(\tau(\sigma)\big)}{\varepsilon} * \big(\tau_1'(\sigma) + i\tau_2'(\sigma)\big) d\sigma. \tag{16}$$

В (16) проведем преобразование

$$\Pi = exp \frac{A\big(t(\sigma)\big) - A\big(\tilde{t}(\tilde{s})\big)}{\varepsilon} \left[x^0 exp \frac{A\big(\tilde{t}(\tilde{s})\big)}{\varepsilon} + \int_0^{\tilde{s}} f(\tau, \Pi)\, exp \frac{A\big(\tilde{t}(\tilde{s})\big) - A\big(\tau(s)\big)}{\varepsilon} \times\times \big(\tau_1'(s) + i\tau_1'(s)\big) ds \right] \\ + \int_0^{\tilde{\sigma}} f(\tau, \Pi) exp \frac{A\big(t(\tilde{\sigma})\big) - A\big(\tau(\sigma)\big)}{\varepsilon} \times\times \big(\tau_1'(\sigma) + i\tau_2'(\sigma)\big) d\sigma, \text{где } \tilde{t}(\tilde{s}) \\ \in (p_0). \tag{17}$$

В (17), выражение содержащееся в скобке $[\ldots]$, дает решение уравнения (6) при $\tilde{t}(\tilde{s}) \in (p_0)$ т. е. $\Pi(\tilde{t}(\tilde{s}), \varepsilon)$. Согласно (15) для этого решения справедлива оценка

$$\Pi(\tilde{t}(\tilde{s}),\varepsilon) \le M_1, \tilde{t}(\tilde{s}) \in (p_0). \tag{18}$$

(17) можем переписать в виде

$$\Pi = \Pi(\tilde{t}(\tilde{s}),\varepsilon) exp \frac{A\big(t(\tilde{\sigma})\big) - A\big(\tilde{t}(\tilde{s})\big)}{\varepsilon} + \int_0^{\tilde{\sigma}} f(\tau,\Pi) exp \frac{A\big(t(\tilde{\sigma})\big) - A\big(\tau(\sigma)\big)}{\varepsilon} \times \times \big(\tau_1'(\sigma) + i\tau_2'(\sigma)\big) d\sigma. \tag{19}$$

Для исследования уравнения (19) применим метод последовательных приближений. Последовательные приближения определим так

$$\Pi_m = \Pi(\tilde{t}(\tilde{s}),\varepsilon) exp \frac{A\big(t(\tilde{\sigma})\big) - A\big(\tilde{t}(\tilde{s})\big)}{\varepsilon} + \int_0^{\tilde{\sigma}} f(\tau,\Pi_{m-1}) exp \frac{A\big(t(\tilde{\sigma})\big) - A\big(\tau(\sigma)\big)}{\varepsilon} \times \times \big(\tau_1'(\sigma) + i\tau_2'(\sigma)\big) d\sigma. \quad \Pi_0(t,\varepsilon) \equiv 0, m = 1,2,\ldots \tag{20}$$

Сначала оценим последовательные приближения (20), затем докажем их равномерную сходимость. Учитывая $Re\big(\tilde{t}(\tilde{s})\big) = 0$ получим

$$|\Pi_1| \le |\Pi(\tilde{t}(\tilde{s}),\varepsilon)| exp \frac{Re\, A\big(t(\tilde{\sigma})\big)}{\varepsilon}. \tag{21}$$

Далее

$$|\Pi_1| \le |\Pi_1| + M_2 M_0 \int_0^{\tilde{\sigma}} |\Pi_1|\, exp \frac{Re\Big(A\big(t(\tilde{\sigma})\big) - A\big(\tau(\sigma)\big)\Big)}{\varepsilon} d\sigma \le$$

$$\le M_1 exp \frac{Re\, A\big(t(\tilde{\sigma})\big)}{\varepsilon} + M_3 M_1 exp \frac{Re\, A\big(t(\tilde{\sigma})\big)}{\varepsilon} \quad \tilde{\sigma} == M_1 exp \frac{Re\, A\big(t(\tilde{\sigma})\big)}{\varepsilon} (1 + M_3\tilde{\sigma}),$$

$$|\Pi_2| \le M_1 exp \frac{Re\, A\big(t(\tilde{\sigma})\big)}{\varepsilon} (1 + M_3\tilde{\sigma}).$$

Продолжив процесс получим

$$|\Pi_m| \le M_1 exp \frac{Re\, A\big(t(\tilde{\sigma})\big)}{\varepsilon} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(M_3\tilde{\sigma})^k}{k!}, m = 1,2,\ldots \tag{22}$$

Из (22) $\forall m \in N$имеем оценку

$$|\Pi_m| \le M_1 exp \frac{Re\, A\big(t(\tilde{\sigma})\big)}{\varepsilon} exp M_3\tilde{\sigma}.$$

Если учесть, что D ограниченная область, то $exp M_3\tilde{\sigma} < M_4$.
Таким образом

$$|\Pi_m| \le M_5 exp \frac{Re\, A\big(t(\tilde{\sigma})\big)}{\varepsilon}, \quad M_5 = M_1 M_4. \tag{23}$$

Теперь докажем сходимость последовательных приближений. Для этого оценим

$$|\Pi_m - \Pi_{m-1}|.$$

Имеем, учитывая У4 (за счет $\tilde{\sigma}$, всегда можно добиться, чтобы $(t, \Pi_m) \in H$).

$$|\Pi_2 - \Pi_1| \le M_2 M_0 \int_0^{\tilde{\sigma}} |\Pi_1|\, exp \frac{Re\left(A(t(\tilde{\sigma})) - A(\tau(\sigma))\right)}{\varepsilon} d\sigma \le$$

$$\le M_3 M_1 exp \frac{Re\, A(t(\tilde{\sigma}))}{\varepsilon} \quad \tilde{\sigma},$$

$$|\Pi_m - \Pi_{m-1}| \le M_1 exp \frac{Re\, A(t(\tilde{\sigma}))}{\varepsilon} \frac{(M_3 \tilde{\sigma})^{m-1}}{(m-1)!}, m = 1, 2, \ldots$$

Таким образом, на основе полученных оценок можем утверждать, что ряд

$\sum_{m=1}^{\infty} |\Pi_m - \Pi_{m-1}|$ сходится равномерно $\forall t \in D_{01}^{\varepsilon}$ к некоторой функции $\Pi(t, \varepsilon)$, которая является решением (19) для $t \in D_{01}^{\varepsilon}$.

Если учесть (23), то для этого решения справедлива оценка

$$|\Pi| \le M_5 exp \frac{Re\, A(t(\sigma))}{\varepsilon}, t \in D_{01}^{\varepsilon}. \tag{24}$$

Пусть $t \in D_{01}^{1}$. Для этого случая, повторяя вычисления проведенные в 2 получим аналогичную оценку, оценке (24) т. е.

$$|\Pi| \le M_5 exp \frac{Re\, A(t(\sigma))}{\varepsilon}, t \in D_{01}^{1}. \tag{25}$$

Объединяя оценки (15), (24), (25) для $\Pi(t, \varepsilon)$ можно записать оценку

$$|\Pi| \le M_5 exp \frac{Re\, A(t(\sigma))}{\varepsilon}, t \in (p_0) \cup D_{01}^{\varepsilon} \cup D_{01}^{1}.$$

Таким образом первая часть теоремы для $\Pi(t, \varepsilon)$, доказана.

Теперь докажем вторую часть теоремы. Как и в предыдущем случае оценим (9) и докажем их равномерную сходимость. Ограничимся только оценкой только первого приближения, а оценка для оставшихся приближений и доказательство сходимости повторяются вычисления проведенные в предыдущих случаях.

Пусть $t \in (p_0)$. Тогда

$$x_1 = \int_0^{\tilde{s}} b(\tau) exp \frac{A(t(\tilde{s})) - A(\tau(s))}{\varepsilon} \left(\tau_1'(s)\right) + i\left(\tau_2'(s)\right) ds$$

$$\left(b_1(\tau) \equiv b(\tau)\left(\tau_1'(s)\right) + i\left(\tau_2'(s)\right)\right) = \int_0^{\tilde{s}} b_1(\tau) exp \frac{A(t(\tilde{s})) - A(\tau(s))}{\varepsilon} ds.$$

К последнему интегралу, согласно У2, можно применить интегрирование по частям. Применяя этот метод, затем переходя к модулю, получим

$$|x_1| \le M_6 \varepsilon, t \in (p_0). \tag{26}$$

$t \in D_{01}^{\varepsilon} \cup D_{01}^{1}$. В этом случае, повторяя преобразование случая 2 ($t \in D_{01}^{\varepsilon}$), получим

$$x_1(t, \varepsilon) = \int_0^{\tilde{s}} b_1(\tau) exp \frac{A(t(\tilde{\sigma})) - A(\tau(s))}{\varepsilon} \left(\tau_1'(s)\right) + i\left(\tau_2'(s)\right) ds +$$

$$+\int_0^{\tilde{\sigma}} b_1(\tau)exp\frac{A(t(\tilde{\sigma}))-A(\tau(\sigma))}{\varepsilon}(\tau_1'(\sigma))+i(\tau_2'(\sigma))d\sigma=$$

$$=\ exp\frac{A(t(\sigma))-A(\tilde{t}(\tilde{s}))}{\varepsilon}\left[\int_0^{\tilde{s}} b_1(\tau)exp\frac{A(\tilde{t}(\tilde{s}))-A(\tau(s))}{\varepsilon}(\tau_1'(s))+i(\tau_2'(s))ds\right]+$$

$+\int_0^{\sigma} b_1(\tau)exp\frac{A(t(\tilde{\sigma}))-A(\tau(\sigma))}{\varepsilon}(\tau_1'(\sigma))+i(\tau_2'(\sigma))d\sigma$ (выражение содержащееся в скобке [...], есть функция

$$x_1(\tilde{t},\varepsilon)\ (\tilde{t}\in(p_0)))=x_1(\tilde{t}(\tilde{s}),\varepsilon)exp\frac{A(t(\tilde{\sigma}))-A(\tilde{t}(\tilde{s}))}{\varepsilon}+ \tag{27}$$

$$+\int_0^{\tilde{\sigma}} b_1(\tau)exp\frac{A(t(\tilde{\sigma}))-A(\tau(\sigma))}{\varepsilon}(\tau_1'(\sigma))+i(\tau_2'(\sigma))d\sigma,$$

$$x_1(t,\varepsilon)=x_1(\tilde{t},\varepsilon)\ exp\frac{A(t(\tilde{\sigma}))-A(\tilde{t}(\tilde{s}))}{\varepsilon}+$$

$$+\int_0^{\tilde{\sigma}} b_1(\tau)exp\frac{A(t(\tilde{\sigma}))-A(\tau(\sigma))}{\varepsilon}(\tau_1'(\sigma))+$$

$$+i(\tau_2'(\sigma))d\sigma,\dots\ t\in D_{01}^{\varepsilon}\cup D_{01}^{1}$$

В выражении (27)

$$|x_1(\tilde{t},\varepsilon)|\le M_1\varepsilon,$$

$$\left|exp\frac{A(t(\tilde{\sigma}))-A(\tilde{t}(\tilde{s}))}{\varepsilon}\right|=exp\frac{Re\,A(t(\tilde{\sigma}))}{\varepsilon}\le\begin{cases}O(1),t\in D_{01}^{\varepsilon}\\O(\varepsilon^n),n\in N,t\in D_{01}^{1},\end{cases}$$

а к интегралу (который обозначим I), применяя интегрирование по частям, затем переходя к модулю получим

$$|I|\le O(\varepsilon),t\in D_{01}^{\varepsilon}\cup D_{01}^{1}.$$

Учитывая все сказанное, имеем

$$|x_1(t,\varepsilon)|\le M_7\varepsilon,t\in D_{01}^{\varepsilon}\cup D_{01}^{1},(M_6\le M_{60}) \tag{28}$$

На основе (26), (28) можем написать оценку

$$|x_1(t,\varepsilon)|\le M_{60}\varepsilon,t\in(p_0)\cup D_{01}^{\varepsilon}\cup D_{01}^{1}.$$

При оценке приближений $x_1(t,\varepsilon),(m=2,3,\dots)$ достаточно рассмотреть случаи $t\in(p_0),t\in D_{01}^{\varepsilon}\cup D_{01}^{1}$.

Теорема доказана. Из теоремы следует функция $\Pi(t,\varepsilon)$ существенна только в области $D_{01}^{\varepsilon}\cup(p_0)$. Следовательно (6) определяет погранслойные линии и области, а (7) — регулярные области [5].

Список литературы:

1. Алыбаев К., Мусакулова Н. Метод линий уровня в теории сингулярно возмущенных уравнений // Вестник Ошского государственного университета. 2022. №4. С. 206-217. https://doi.org/10.52754/16947452_2022_4_206

2. Нарымбетов Т. К Существования и связь областей притяжения решений сингулярно возмущенных уравнений: дисс. … канд. физ.-мат. наук. Ош, 2022.

3. Мурзабаева А. Б Исследование сингулярно возмущенных уравнений с разделением множеств при вырождении: дисс. … канд. физ.-мат. наук. :01.01.02. Ош, 2019.

4. Алыбаев К. С., Бакыт кызы Тахмина Орто мектептин математика курсунда өзгөртүп

түзүүлөрдү маалымат технологияларды колдонуп окутуу// Вестник ЖАГУ. 2023. №2(55). С. 24-29.

5. Панков П. С., Алыбаев К. С., Тампагаров К. Б., Нарбаев М. Р. Явление погранслойных линий и асимптотика решений сингулярно возмущенных линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с аналитическими функциями // Вестник ОшГУ. 2013. №1. С. 227-231.

6. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 736 с.

7. Федорюк М. В. Метод перевала. М.: Наука, 1977. 368 с.

References:

1. Alybaev, K., & Musakulova, N. (2022). Metod linii urovnya v teorii singulyarno vozmushchennykh uravnenii. *Vestnik Oshskogo gosudarstvennogo universiteta,* (4), 206-217. (in Kyrgyz). https://doi.org/10.52754/16947452_2022_4_206

2. Narymbetov, T. K (2022). Sushchestvovaniya i svyaz' oblastei prityazheniya reshenii singulyarno vozmushchennykh uravnenii: diss. … kand. fiz.-mat. nauk. Osh. (in Kyrgyz).

3. Murzabaeva, A. B (2019). Issledovanie singulyarno vozmushchennykh uravnenii s razdeleniem mnozhestv pri vyrozhdenii: diss. … kand. fiz.-mat. nauk. Osh. (in Kyrgyz).

4. Alybaev, K. S. & Вакyt kyzy, T. (2023). Teaching changes in secondary school mathematics course using new information technologies. *Vestnik_JAGU,* (2 (55)), 24-29. (in Kyrgyz).

5. Pankov, P. S., Alybaev, K. S., Tampagarov, K. B., & Narbaev, M. R. (2013). Yavlenie pogransloinykh linii i asimptotika reshenii singulyarno vozmushchennykh lineinykh obyknovennykh differentsial'nykh uravnenii s analiticheskimi funktsiyami. *Vestnik OshGU,* (1), 227-231. (in Kyrgyz).

6. Lavrentev, M. A., & Shabat, B. V. (1973). Metody teorii funktsii kompleksnogo peremennogo. Moscow. (in Russian).

7. Fedoryuk, M. V. (1977). Metod perevala. Moscow. (in Russian).

Работа поступила в редакцию 30.10.2023 г.

Принята к публикации 07.11.2023 г.

Ссылка для цитирования:

Алыбаев К. С., Мусакулова Н. К. Расщепление решений слабо нелинейных сингулярно возмущенных уравнений при регулярном вырождении // Бюллетень науки и практики. 2023. Т. 9. №12. С. 20-29. https://doi.org/10.33619/2414-2948/97/02

Cite as (APA):

Alybaev, K., & Musakulova, N. (2023). Splitting of Solutions of Weakly Nonlinear Singularly Perturbed Equations Under Regular Degeneration. *Bulletin of Science and Practice, 9*(12), 20-29. (in Russian). https://doi.org/10.33619/2414-2948/97/02