УДК 517.928 https://doi.org/10.33619/2414-2948/92/01

# СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЕ УРАВНЕНИЕ СО СКАЧКОМ В РЕШЕНИЯХ

*©**Азимов Б. А.,** ORCID: 0000-0001-5849-8583, канд. физ.-мат. наук,*
*Ошский государственный университет, г. Ош, Кыргызстан, b_r82@bk.ru*

# SINGULARLY PERTURBED EQUATION WITH A JUMP IN SOLUTIONS

*©**Azimov B.,** ORCID: 0000-0001-5849-8583, Ph.D.,*
*Osh State University, Osh, Kyrgyzstan, b_r82@bk.ru*

*Аннотация.* Методом параметризации построена асимптотика решения модельного одномерного сингулярно возмущенного уравнения Лайтхилла. Особенность задачи заключается в том, что в точке x=0 существует особая точка. Доказано, что в этой особой точке решение сингулярно возмущенной задачи Лайтхилла резко меняет свое значение, т. е. происходит явление скачка. Вычислено значение этого скачка.

*Abstract.* The asymptotics of the solution of the model one-dimensional singularly perturbed Lighthill equation is constructed by the parametrization method. A feature of the problem is that there is a singular point at the point x=0. It is proved that at this singular point the solution of the singularly perturbed Lighthill problem changes its value sharply, i.e., jump occurs. The value of this jump is calculated.

*Ключевые слова:* принцип индукции, метод мажорант, особая точка, асимптотика, скачок.

*Keywords:* principle of induction, majorant method, singular point, asymptotics, jump.

Для построения и решения задач использовали работы ряда авторов [1-9}.

Рассмотрим следующую задачу:

$$(x+\varepsilon u)\frac{du}{dx}+q(x)u(x)=r(x), \tag{1}$$

$$u(1)=u^0, \tag{2}$$

где $0<\varepsilon\ll 1$- малый параметр, $x\in[0,1]$, $u^0$— известная постоянная, $q(x), r(x)\in C^\infty[0,1]$ .

Требуется методом параметризации исследовать скачок решения в начальной точке $x=0$. В уравнении (1) введем параметр $\xi\in\xi_0[(\varepsilon),1]$, где $\xi_0(\varepsilon)$- пока неизвестно, и $\xi_0(0)<0$. Если выполняется следующее неравенство

$$x(\xi)+\varepsilon u(\xi)\neq 0, \tag{3}$$

то уравнение (1) эквивалентно следующей системе уравнений

$$\xi\frac{du}{dx}=r\big(x(\xi)\big)-q(x(\xi))u(\xi), \qquad u(1)=u^0 \tag{4.1}$$

$$\xi \frac{du}{d\,\xi} = x(\,\xi) + \varepsilon u(\,\xi), \qquad x(1) = 1 \tag{4.2}$$

Исследуем решение системы уравнений (4.1) и (4.2). Решение будем искать в виде рядов:

$$u(\xi) = u_0(\xi) + \varepsilon u_1(\xi) + \varepsilon^2 u_2(\xi) + \cdots \tag{5.1}$$

$$x = \xi + \varepsilon x_1(\xi) + \varepsilon^2 x_2(\xi) + \cdots \tag{5.2}$$

Здесь $u_j(\xi)$ $(j = 0,1,2,3,\dots)$, $x_k(\xi)(k = 1,2,3,\dots)$ пока неизвестные функции и $u_0(1) = u^0$, $u_k(1) = 0$, $x_k(1) = 0$, *(k=1,2,3…)*.

Подставляя (5.1), (5.2), соответственно, в (4.1) и (4.2) получаем:

$$\xi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{du}{d\xi}(\xi)\varepsilon^k = r(\xi) + \sum_{j=1}^{\infty} r_j\,(\xi)(\varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \cdots)^j +$$

$$+\left[q(\xi) + \sum_{j=1}^{\infty} q_j\,(\xi)(\varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \cdots)^j\right][u_0(\xi) + \varepsilon u_1 + \cdots],$$

$$\xi + \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon \frac{dx}{d\xi} k(\xi) = \xi + \sum_{j=1}^{\infty} x_j\,(\xi)\varepsilon^j + \varepsilon \sum_{j=1}^{\infty} u_j(\xi)\varepsilon^j.$$

Отсюда, если приравнять коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра, то имеем

$$r_k(\xi) = \frac{1}{k!}\frac{d^k r(\xi)}{d\xi^k}, \quad q_j(\xi) = \frac{1}{j!}\frac{d^j q(\xi)}{d\xi^j}. \tag{6.0}$$

$$\xi \frac{du_0}{d\xi} = -q(\xi)u_0(\xi) + r(\xi), \quad u_0(1) = u^0,$$

$$Lu_1(\xi) \coloneqq \xi \frac{du_1}{d\xi} + q(\xi)u_1(\xi) = r_1(\xi)x_1(\xi) + q_1(\xi)x_1(\xi)u_0(\xi).$$

$$u_1(1) = 0. \tag{6.1}$$

$$Mx_1(\xi) \coloneqq \xi \frac{dx_1(\xi)}{d\xi} - x_1(\xi) = u_0(\xi), \qquad x_1(1) = 0 \tag{7.1}$$

$$\begin{aligned} Lu_2(\xi) &= r_1 x_2 + r_2 x_1^2 + q_1 x_2 u_0(\xi) + u_1 q_1(\xi) x_1 = \\ &= r_1 x_2 + q_1 r_2 u_0 + f_1(x_1, u_1),\ u_2(1) = 0 \end{aligned} \tag{6.2}$$

$$Mx_2 = u_2(\xi), x_2(1) = 0, \dots .\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots .\ \ \dots\ \dots \tag{7.2}$$

$$Lu_m(\xi) = r_1 x_2 + q_1 x_m u_0 + f_m(x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, u_1, u_2, \dots, u_{m+1}),$$

$$u_m(1) = 0. \tag{6.m}$$

$$Mx_m = u_{m-1}(\xi), \qquad x_m(1) = 0, \tag{7.m}$$

$$\dots .\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots .\ \ \dots\ \dots$$

Функция $f_m(x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, u_0, u_1, \dots, u_{m-1})$ – (6.0) — решение, зависящее только от функций, состоящих из собственных аргументов

$$u_0(\xi) = u^0 exp\left\{-\int_1^{\xi} q(s)s^{-1}ds + P(\xi)\int_1^{\xi} P^{-1}(s)s^{-1}r(s)ds\right\}, \tag{8}$$

Здесь

$$P(\xi) = exp\left[-\int_1^{\xi} q(s)s^{-1}ds\right] = s^{-q_0}exp\left\{-\int_1^{\xi}\frac{q(s)-q_0}{s}\right\}ds =$$
$$= \xi^{-q}Q(\xi), \quad Q(s) = exp\left\{-\int_1^{\xi}\frac{q(s)-q_0}{s}ds\right\}.$$

Мы считаем

$$q_0 = q(0) > 0.$$

Тогда (8)

$$u_0(\xi)\sim\xi^{-q}Q(0) = \xi^{-q_0}, \quad \xi \to 0. \qquad (a_i = Q(0)) \tag{9}$$

Другими словами

$$\xi \to 0 \text{ при } u_0 \to \infty.$$

$$a_0 = a(0)\left[u^0 + \int_1^0 s^{-1+q^0}\right]Q^{-1}(s)r(s)ds$$

Теперь из (7.1)

$$x_1(\xi) = \xi\int_1^{\xi} s^{-2}u_0(s)ds \sim \xi\int_1^{\xi} u_0 s^{-q_0-2}ds \sim -\beta\xi^{-q_0}, \qquad \xi \to 0, \qquad \beta = \frac{u_0}{1+q_0}$$

Другими словами

$$x_1(\xi)\sim -\beta_1\xi^{-q_0}, \qquad \xi \to 0 \tag{10}$$

Теперь из (6.1).

$$Lu_1(\xi)\sim A_1\xi^{-2q_0-a}, \xi \to 0 \tag{11}$$

Здесь мы пишем $A_1 = const$, то из (11).

$$u_1(\xi)\sim\xi^{-q_0}\int_1^{\xi} s^{q_0-1}dsD_1\sim\xi^{-2q_0}B_1, \qquad \xi \to 0. \; B_1 = const.$$

Теперь найдем асимптотику $x_2(\xi)$- из (7.2).

$$x_2(\xi) = \xi\int_1^{\xi} s^{-2}u_1(s)ds \sim \xi\int_1^{\xi} B_1S^{-2q_0-2}ds\sim\beta_2\xi^{-2q_0}, \qquad \xi \to 0.$$

Теперь из (6.2)

$$Lu_2(\xi)\sim A_2\xi^{-3q_0}, \qquad \xi \to 0.$$

Из этого

$$u_2(\xi)\sim\xi^{-q_0}\int_1^{\xi} s^{2q_0-1}dsB_1\sim B_2\xi^{-q_0}, \qquad \xi \to 0.$$

Далее по полной математической индукции

$$x_k(\xi)\sim -\beta_k\xi^{-kq_0}, u_k(\xi)\sim B_1\xi^{-kq_0}, \; \xi \to 0.$$

Значить, асимптотика решения системы уравнений (4.1) и (4.2.) примет вид:

$$\begin{gathered} u(\xi)\sim\xi^{-q_0}[a_0 + B_1\xi^{-q_0}\varepsilon + B_2(\xi^{-q_0}\varepsilon) + \cdots + B_k(\xi^{-q_0}\varepsilon) + \cdots] \\ x(\xi)\sim\beta[\bar{\xi} + \beta_1\xi^{-q_0}\varepsilon + \beta_2(\xi^{-q_0}\varepsilon)^2 + \cdots + \beta_n(\xi^{-q}\varepsilon)^n + \cdots] \end{gathered} \tag{12}$$

Из (12) этот ряд является асимптотическим рядом. Если

$$\xi \in \{\varepsilon^{q_0+\gamma}, 1\} \tag{13}$$

Если $(0 < \gamma < 1)$.

Теперь

$$x(\bar{\xi}) = \xi - \frac{a_0}{1+q_0}\xi^{-4}\varepsilon + O(\varepsilon^2) \qquad (14)$$

Если мы найдем, какое значение $\xi$ соответствует $x = 0$ из уравнения

$$\xi_0(\varepsilon) \sim (\varepsilon\frac{a_0}{1+q_1})^{\frac{1}{q_0+1}} > 0,\ \xi \to 0 \qquad (15)$$

Тогда из (12.1)

$$u(0) \sim (\varepsilon\frac{a_0}{1+q_1})^{\frac{-q_0}{q_0+1}} \qquad (16)$$

Следовательно, (16) есть скачок решения в точке x=0. Таким образом, мы получили формальное доказательство следующего уравнения. Теперь проверим, когда уравнения (1) и (4) эквивалентны.

$$x(\xi + \varepsilon u(\xi)) = \xi - \varepsilon\frac{a_0}{1+q_0}\xi^{-q_0} + \varepsilon a_0\xi^{-q_0} + O(\varepsilon^2) = \xi + \varepsilon\xi^{-q_0}a_0\frac{q_0}{1+q_0} + O(\varepsilon^2), \qquad \varepsilon \to 0$$

Это выражение будет нулен, если

$$\xi \sim (-\frac{\varepsilon q_0 a_0}{1+q_0})^{\frac{1}{1+q_0}},\ a_0 > 0 \text{ оно мнимое.}$$

Таким образом $x(\xi) + \varepsilon u(\xi) \neq 0$ если $a_0 > 0$ , то есть системы (1) и (4) эквивалентны при $a_0 > 0$.

*Теорема.* Если

$$a_0 = Q(0)\left[u_0 + \int_1^0 s^{-1+q_0}Q(s)r(s)ds\right] > 0$$

То решение задачи (1) существует на отрезке [0,1] и в точке $x = 0$ будет скачок (16). Полное доказательство теоремы доказывается методом мажорант. Случай*, когда $q(0) = 0$, $r(0) = r_0 < 0$. В этом случае:

$$u_0(x) \sim r_0 lnx \qquad (17)$$

Будем считать, что

$$r_0 = r(0) < 0 \qquad (18)$$

Тогда из уравнений предыдущего случая*

$$x_1(\xi) = \xi\int_1^\xi s^{-2}u_0(s)ds \sim \xi\int_1^\xi s^{-2}r_0 lnSds \left|\begin{matrix} u = lnS \\ dv = S^{-2}ds \end{matrix} V = -S^{-1}\right| = \sim$$

$$\sim \xi r_0 lnS(-s^{-1})\Big|_1^\xi + \xi\int_1^\xi lnS \cdot S^{-1}ds \sim -r_0 ln\xi,\ \xi \to 0 \text{ т.е.}$$

$$x_1(\xi) \sim -r_0 ln\xi \qquad (19)$$

Теперь определим $u_1(\xi)$. Из предыдущего пункта (6.1).

$$u_1(\xi) \sim P(\xi)\int_1^\xi P^{-1}(s)\ln^2(s)r_0^2 s^{-1}ds \sim B_1 ln^3\xi ds, \qquad \xi \to 0 \qquad (20)$$

$$B_1 = q_1(0)r_0 > 0$$

Отсюда

$$B_1 = const > 0$$

Теперь определим $x_2(\xi)$.

$$x_2(\xi) = \xi \int_1^\xi s^{-2}\, u_1(s)ds \sim -\beta_1 ln^3\xi, \qquad \beta_2 = -\beta_1 < 0 \tag{21}$$

Если $u_2(\xi)$ – функция

$$u_2(\xi) \sim P(\xi)\int_1^\xi ln^4(s)\, s^{-1}ds \sim B_2 ln^5\xi, \qquad \xi \to 0$$
$$B_2 = const$$

По принципу индукции

$$\begin{aligned} x_m(\xi) &\sim \beta_m ln^{2m+1}\xi, \quad \xi \to 0. \quad (m \geq 1) \\ u_m(\xi) &\sim \beta_m ln^{2m+1}\xi, \quad \xi \to 0. \quad \forall m \in N \end{aligned} \tag{22}$$

Так что

$$u(\xi) \sim \ln\xi[r_0 + B_1\varepsilon ln^3\xi + (\varepsilon ln^3\xi)^2 B_2 + \cdots + (\varepsilon ln^3\xi)^m B_m + \cdots] \tag{23}$$
$$x(\xi) \sim \xi - r_0\varepsilon ln\xi + \cdots + \beta_m(\varepsilon ln^3\xi)^m + \cdots$$
$$x(\xi) = 0 \Rightarrow \xi + \beta_1 ln^3\xi q^2 = 0 \ \to \xi_0 \sim \varepsilon^{-2} ln^3\varepsilon^{-2} B_1 > 0$$

В интервале [ξ_0 (ε),1] ряд (23) сходится.
Теперь

$$x(\xi) + \varepsilon u(\xi) \sim \xi + r_0 ln\xi \neq 0,\ \xi \in [\xi_0, 1]$$

Поэтому (1) и (2) эквивалентны в точке $x = 0$

$$u(\xi_0) \sim r_0 ln\xi_0$$

и будет скачком.

*Список литературы:*

1. Kapila A. K. Asymptotic treatment of chemically reacting systems. 1983.

2. Алымкулов К. Метод униформизации и обоснование метода Лайтхилла // Известия АН Киргизской ССР. 1981. №1. С. 35-38.

3. Alymkulov K., Tursunov T. D. Perturbed differential equations with singular points // Recent Studies in Perturbation Theory; Uzunov, DI, Ed.; InTech: Zagreb, Croatia. 2017. P. 1-42. http://dx.doi.org/10.5772/67856

4. Алымкулов К., Кожобеков К. Г. Асимптотика решения задачи химической реакции со стационарной достижимостью // Вестник Жалал-Абадского государственного университета. 2019. №3. С. 128-133.

5. Ильин А. М., Данилин А. Р. Асимптотические методы в анализе. М.: Физматлит, 2009. 248 с.

6. Коул Д. Д. Методы возмущений в прикладной математике. М.: Мир. 1972. 276 с.

7. Carrier G. F. Boundary layer problems in applied mathematics // Communications on Pure and Applied Mathematics. 1954. V. 7. №1. P. 11-17. https://doi.org/10.1002/cpa.3160070103

8. Kevorkian J., Cole J. D. Perturbation methods in applied mathematics. Springer Science & Business Media, 2013. V. 34. https://doi.org/10.1007/978-1-4757-4213-8

9. Брейн Н. Г. Асимптотические методы в анализе. М.: Изд-во иностр. лит., 1961. 247 с.

*References:*

1. Kapila, A. K. (1983). Asymptotic treatment of chemically reacting systems.

2. Alymkulov, K. (1981). Metod uniformizatsii i obosnovanie metoda Laitkhilla. *Izvestiya AN Kirgizskoi SSR,* (1), 35-38. (in Russian).

3. Alymkulov, K., & Tursunov, T. D. (2017). Perturbed differential equations with singular points. *Recent Studies in Perturbation Theory; Uzunov, DI, Ed.; InTech: Zagreb, Croatia*, 1-42. http://dx.doi.org/10.5772/67856

4. Alymkulov, K., & Kozhobekov, K. G. (2019). Asimptotika resheniya zadachi khimicheskoi reaktsii so statsionarnoi dostizhimost'yu. *Vestnik Zhalal-Abadskogo gosudarstvennogo universiteta,* (3), 128-133. (in Russian).

5. Il'in, A. M., & Danilin, A. R. (2009). Asimptoticheskie metody v analize. Moscow. (in Russian).

6. Koul, D. D. (1972). Metody vozmushchenii v prikladnoi matematike. Moscow. (in Russian).

7. Carrier, G. F. (1954). Boundary layer problems in applied mathematics. *Communications on Pure and Applied Mathematics, 7*(1), 11-17. https://doi.org/10.1002/cpa.3160070103

8. Kevorkian, J., & Cole, J. D. (2013). *Perturbation methods in applied mathematics* (Vol. 34). Springer Science & Business Media. https://doi.org/10.1007/978-1-4757-4213-8

9. Brein, N. G. (1961). Asimptoticheskie metody v analize. Moscow. (in Russian).

*Работа поступила в редакцию 04.06.2023 г.*

*Принята к публикации 12.06.2023 г.*

---

*Ссылка для цитирования:*

Азимов Б. А. Сингулярно возмущенное уравнение со скачком в решениях // Бюллетень науки и практики. 2023. Т. 9. №7. С. 12-17. https://doi.org/10.33619/2414-2948/92/01

*Cite as (APA):*

Azimov, B. (2023). Singularly Perturbed Equation With a Jump in Solutions. *Bulletin of Science and Practice, 9*(7), 12-17. (in Russian). https://doi.org/10.33619/2414-2948/92/01