УДК 373.5.016:514:004 https://doi.org/10.33619/2414-2948/126/82

МЕТОДИЧЕСКАЯ ИНТЕГРАЦИЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ И ЦИФРОВЫХ ИНСТРУМЕНТОВ ПРИ ОБУЧЕНИИ РЕШЕНИЮ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

*©**Аликова А. М.**, ORCID: 0009-0007-6635-1638, SPIN-код: 1033-3115, канд. пед. наук, Кыргызский государственный университет им. И. Арабаева, г. Бишкек, Кыргызстан*
*©**Жунусакунова А. Д.**, SPIN-код: 9518-7315 канд. пед. наук, Нарынский государственный университет им. С. Нааматова, г. Нарын, Кыргызстан*
*©**Кобзарь Е.**, Кыргызский государственный университет им. И. Арабаева, г. Бишкек, Кыргызстан*

METHODOLOGICAL INTEGRATION OF ANALYTICAL AND DIGITAL TOOLS IN TEACHING SOLVING GEOMETRIC PROBLEMS

*©**Alikova A.**, ORCID: 0009-0007-6635-1638, SPIN-code: 1033-3115, Ph.D., Kyrgyz State University named after I. Arabaev, Bishkek, Kyrgyzstan*
*©**Zhunusakunova A.**, SPIN-code: 9518-7315, Ph.D., Naryn State University named after S. Namatov, Naryn, Kyrgyzstan*
*©**Kobzar E.**, Kyrgyz State University named after I. Arabaev, Bishkek, Kyrgyzstan*

Аннотация. Рассматриваются методические аспекты решения стереометрической задачи на нахождение расстояния от точки до прямой в пространстве в условиях профильного обучения. Представлено три способа решения: традиционный вычислительный (на основе геометрических соотношений), координатно-векторный метод и способ с использованием динамической математической среды GeoGebra. Показаны методические преимущества каждого подхода, их взаимодополняющий характер и дидактический потенциал при формировании аналитического мышления обучающихся. Обосновывается целесообразность интеграции аналитических и цифровых инструментов в контексте обновления предметного стандарта по математике и перехода к профильной дифференциации обучения.

Abstract. The article examines methodological approaches to solving a stereometric problem on determining the distance from a point to a line in space within the framework of specialized (profile-oriented) secondary education. The solution is presented through three methods: the traditional computational approach based on geometric relations, the coordinate-vector method, and verification using the dynamic mathematics software GeoGebra. The paper analyzes the methodological advantages of each approach, demonstrates their complementary nature, and reveals their didactic potential in fostering students' analytical thinking and modeling skills. The relevance of integrating analytical and digital tools is substantiated in the context of updated mathematics curriculum standards and the transition to differentiated profile education.

Ключевые слова: профильное обучение, стереометрия, координатный метод, векторный метод, вычислительный способ, вариативность решений, математическое моделирование, цифровые образовательные технологии, GeoGebra, аналитическое мышление.

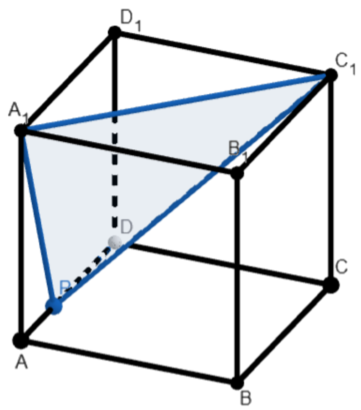
Keywords: specialized education, stereometry, coordinate method, vector method, computational approach, variability of solutions, mathematical modeling, digital educational technologies, GeoGebra, analytical thinking.

В условиях обновления предметного стандарта по математике и перехода к профильной дифференциации обучения существенно усиливается роль методов, ориентированных на аналитическое мышление, моделирование и использование цифровых инструментов. В профильных и предпрофильных классах акцент переносится с преимущественно синтетического изложения геометрии на интеграцию координатных, векторных и вычислительных методов, что соответствует современным требованиям к математической подготовке обучающихся. Особое внимание в старшей школе уделяется содержательной линии, связанной с методом координат, геометрическими преобразованиями и прикладным моделированием пространственных ситуаций. Это предполагает формирование у учащихся умений переводить геометрическую задачу в аналитическую форму, использовать алгебраический аппарат для исследования пространственных отношений, а также применять цифровые средства визуализации и проверки полученных результатов. В контексте разрабатываемой концепции профильных и предпрофильных классов возрастает необходимость демонстрации вариативности способов решения одной и той же задачи и осознанного выбора рациональной стратегии.

Актуальность темы обусловлена необходимостью формирования у обучающихся гибкости математического мышления, способности переходить от геометрической модели к аналитической и обратно, а также умения использовать современные цифровые инструменты для проверки и интерпретации результатов. Рассмотрим задачу из стереометрии на нахождение расстояние от точки до прямой. Для определения расстояния от точки до прямой обычно рассматривают треугольник, одной из вершин которого является заданная точка, а две другие лежат на заданной прямой. Искомое расстояние находят как высоту этого треугольника, для чего в большинстве случаев подсчитывают сначала стороны треугольника. Вычисление сторон треугольника и затем его высоты выполняют поэтапно-вычислительным способом. При этом в некоторых случаях бывает целесообразно ввести с этой целью прямоугольную систему координат.

Задача 1. На ребре куба AD $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка P так, что отношение AP:AD принимает значение 1:4. Опустим перпендикуляр из точки A_1 на прямую C_1P. Считая ребро куба равным *a,* найти расстояния от вершины A_1 до прямой C_1P.

I способ. Построим куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и искомый треугольник A_1C_1P, где вершина A_1 – данная в условии точка, а две другие лежат на заданной прямой C_1P.



Для построения перпендикуляра A_1H подсчитаем стороны ΔA_1C_1P. Из прямоугольного ΔA_1AP найдем сторону A_1P (длины сторон нужны будут также для определения вида Δ по углам).

$$A_1P = \sqrt{{AA_1}^2 + AP^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{16}} = \frac{\sqrt{17}a}{4}.$$

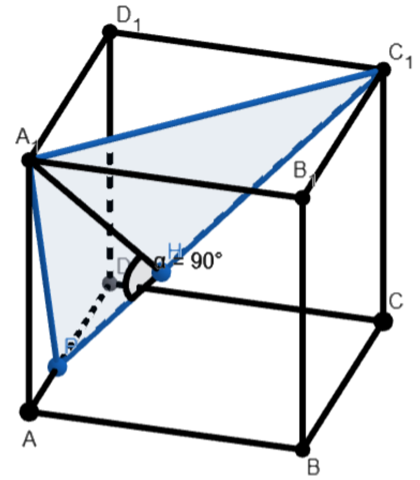
Т. 12. №5 2026
https://doi.org/10.33619/2414-2948/126

Из прямоугольного $\Delta A_1B_1C_1$ найдем сторону A_1C_1: $A_1C_1 = \sqrt{A_1B^2 + B_1C_1{}^2} = \sqrt{2}a$

Из прямоугольного Δ PCC_1 найдем сторону PC_1.

$PC_1 = \sqrt{PC^2 + CC_1{}^2} = \sqrt{(PD^2 + DC^2) + CC_1{}^2} = \sqrt{\frac{9}{16}a^2 + a^2 + a^2} = \sqrt{\frac{9+a^2+32a^2}{16}} = \frac{\sqrt{41}a}{4}$.

В ΔA_1C_1P: $PC_1{}^2 < A_1P^2 + A_1C_1{}^2$ так как, $\frac{41a^2}{16} < \frac{17a^2}{16} + 2a^2 = \frac{49a^2}{16}$. Следовательно, $\angle A_1$- острый. $A_1P^2 < A_1C_1{}^2 + PC_1{}^2$так как, $\frac{41a^2}{16} < \frac{17a^2}{16} + 2a^2 = \frac{48a^2}{16}$. Следовательно, $\angle C_1$- острый. $A_1C_1{}^2 < A_1P^2 + PC_1{}^2$ так как, $2a^2 < \frac{17a^2}{16} + \frac{41a^2}{16} = \frac{58a^2}{16}$. Следовательно, $\angle P$- острый. Итак, ΔA_1C_1P – остроугольный, поэтому основание перпендикуляра AH $\in$ отрезку PC_1. Выразим A_1H^2 двумя способами: $A_1H^2 = A_1P^2 - PH^2$, $A_1H^2 = A_1C_1{}^2 - HC_1{}^2$. Или $A_1P^2 - PH^2 = A_1C_1{}^2 - (PC_1 - PH)^2$; $\frac{17}{16}a^2 - PH^2 = 2a^2 - (\frac{41a^2}{16} - 2 \cdot \frac{\sqrt{41}}{2} \cdot a \cdot PH + PH^2)$; $\frac{17}{16}a^2 + \frac{41a^2}{16} - 2a^2 = \frac{\sqrt{41}}{2} \cdot a \cdot PH$, откуда $PH = \frac{13a^2}{68} \cdot \frac{2a}{\sqrt{41}a} = \frac{13a}{4\sqrt{41}}$.



Тогда $\frac{C_1H}{PH} = \frac{7a}{\sqrt{41}} \cdot \frac{4\sqrt{41}}{13a} = \frac{28}{13}$; $C_1H = \frac{\sqrt{41}a}{4} - \frac{13a}{4\sqrt{41}} = \frac{41a-13a}{4\sqrt{41}} = \frac{28a}{4\sqrt{41}} = \frac{7a}{\sqrt{41}}$.

Теперь находим точку H и строим высоту. Из прямоугольного ΔA_1HC_1 находим:

$$A_1H = \sqrt{A_1P^2 - PH^2} = \sqrt{\frac{17a^2}{16} - \frac{169a^2}{16 \cdot 41}} = \sqrt{\frac{528a^2}{16 \cdot 41}} = \sqrt{\frac{16 \cdot 33 \cdot a^2}{16 \cdot 41}} = \sqrt{\frac{33}{41}}a.$$

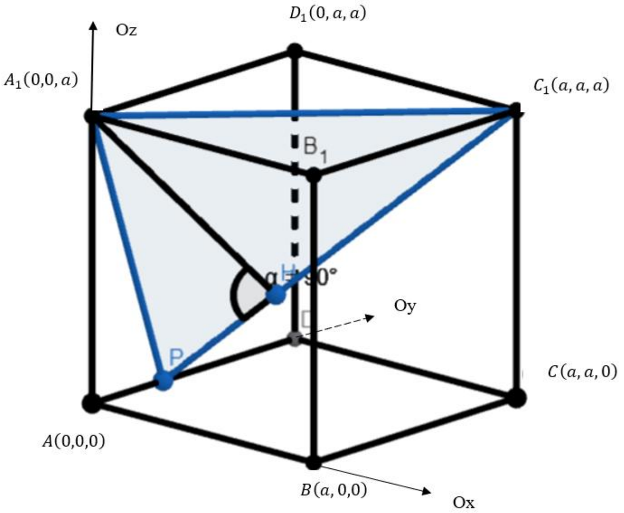
II способ. Введем в пространство прямоугольную систему координат. Пусть вершину A расположим в начало координат (0,0,0) и направим оси вдоль ребер куба.

Ось Ox – *вдоль* AB, Ось Oy – *вдоль* AD, ось Oz – *вдоль* AA_1. При ребре куба, равный a, координаты точек будут следующими $A(0,0,0), B(a,0,0), D(0,a,0), C(a,a,0)$, $A_1(0,0,a)$, $B_1(a,0,a)$, $C_1(a,a,a), D_1(0,a,a)$. Определим координаты точки P. Точка P лежит на ребре AD , причем $\frac{AP}{AD} = \frac{1}{4}$. Так как $AD = a$, *то* $AP = \frac{a}{4}$. Следовательно, $P\left(0, \frac{a}{4}, 0\right)$. Определим направляющий вектор прямой C_1P . $\vec{v} = \overrightarrow{C_1P} = \left(0 - a; \frac{a}{4} - a; 0 - a\right) = \left(-a; -\frac{3a}{4}; -a\right)$. Для удобства вычислений возьмем вектор $\vec{s}$ сонаправленный с $\overrightarrow{C_1P}$, $\vec{s} = (4; 3; 4)$. Определим вектор $\overrightarrow{A_1C_1}$. $\overrightarrow{A_1C_1} = (a - 0; a - 0; a - a) = (a, a, 0)$.

Т. 12. №5 2026
https://doi.org/10.33619/2414-2948/126

Вычислим расстояние от точки до прямой через векторное произведение $d = \frac{|\overrightarrow{A_1C_1} \times \vec{s}|}{|\vec{s}|}$.

Найдем векторное произведение $\overrightarrow{A_1C_1} \times \vec{s} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a & a & 0 \\ 4 & 3 & 4 \end{vmatrix} = i(a \cdot 4 - 0 \cdot 3) - j(0 \cdot 4 - 4 \cdot a) + k\,(a \cdot 4 - a \cdot 3) = (4a;\ -4a; a).$



Найдем модули векторов: $|\overrightarrow{A_1C_1} \times\ \vec{s}| = \sqrt{(4a)^2 + (-4a)^2 + a^2} = \sqrt{16a^2 + 16a^2 + a^2} = \sqrt{33a^2} = a\sqrt{33}.\ |\vec{s}| = \sqrt{4^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{16 + 9 + 16} = \sqrt{41}$

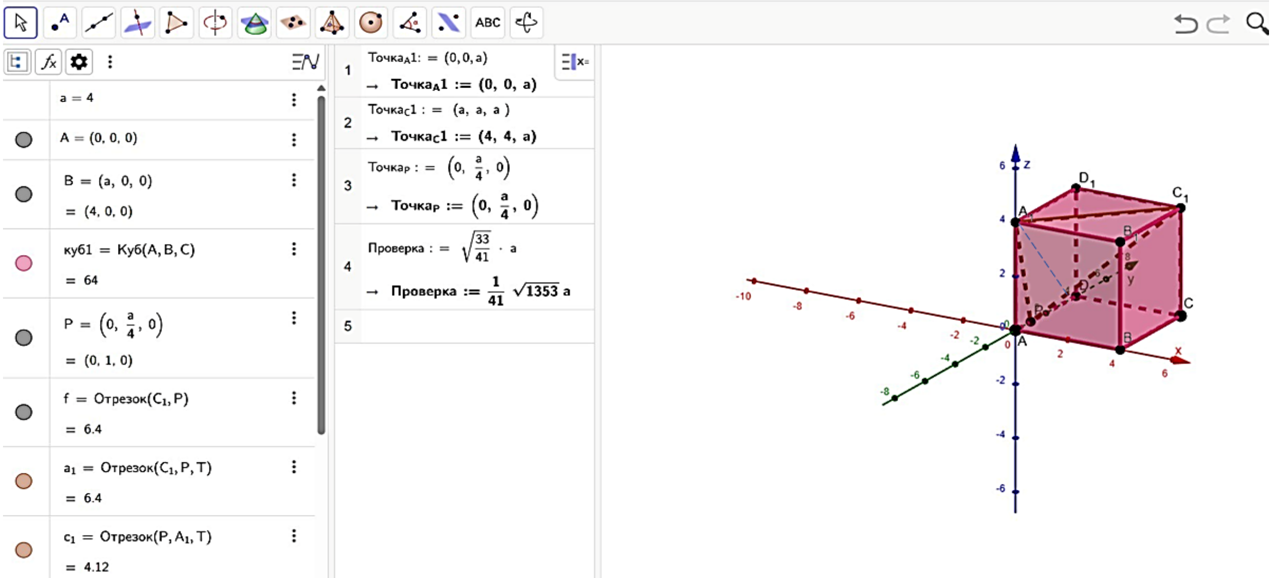
Подставим получившиеся значения в формулу $d = \frac{a\sqrt{33}}{\sqrt{41}}$.

III способ проверки ответа с помощью программы GeoGebra.

Для построения чертежа и проверки решения в строку ввода введем следующие команды: Создаем основы куба и параметры: a=4; A=(0,0,0) ; B=(a,0,0); куб1=куб(A,B) (система построит самостоятельно нужные вершины C_1, D, A_1, B_1, C, D_1. Построение точки и отрезков, P=(0, a/4, 0) точка на ребре AD , f=Отрезок(C_1, P) – основание на которое упадет перпендикуляр, T=Многоугольник(A_1, C_1, P) – треугольник в котором мы ищем высоту.

Построение высоты g=Прямая(C_1, P); H=Проекция(A_1, g) эта команда найдет точку основание перпендикуляра. Высота=Отрезок(A_1, H) отрезок длину которого мы искали.

Для получения ответа откроем меню CAS и введем следующие команды. Точка_A1 := (0,0,a), Точка_C1 := (a, a, a), Точка_P := (0, a/4, 0). Линия := Прямая(Точка_C1, Точка_P), d := Расстояние (Точка_A1, Линия), Проверка := sqrt(33/44)*a. После введения полной программы на панели можем наблюдать появление точного решения, а так же чертеж. Рассмотрение стереометрической задачи тремя различными способами показало, что каждый из них обладает собственной дидактической ценностью. Традиционный вычислительный метод позволяет сохранить геометрическую наглядность и опору на классические свойства фигур. Координатно-векторный способ обеспечивает универсальность и алгоритмичность решения, что особенно важно в профильных классах, где усиливается роль аналитических методов. Использование среды GeoGebra создаёт условия для визуализации пространственных отношений, экспериментальной проверки гипотез и развития исследовательской культуры учащихся. Сопоставление различных методов способствует формированию у обучающихся умения выбирать рациональную стратегию решения в зависимости от структуры задачи, что является одним из ключевых требований обновлённого предметного стандарта.



Именно вариативность подходов обеспечивает более глубокое понимание математического содержания и развивает способность к обобщению и переносу знаний. Особое значение данный подход приобретает в системе подготовки будущих учителей математики. В рамках дисциплины «Практикум по решению математических задач» целесообразно уделять повышенное внимание анализу задач с позиций различных методов решения, их сравнительной эффективности и методической целесообразности применения в школьном курсе. Формирование у студентов навыка методического выбора и рационализации решения является важным условием подготовки учителя STEM-ориентации, способного реализовывать профильное обучение и интегрировать цифровые инструменты в образовательный процесс. Таким образом, представленный подход отвечает современным требованиям профильного математического образования и может рассматриваться как эффективное средство развития аналитической и профессиональной компетентности обучающихся.

Список литературы:

1. Государственный образовательный стандарт общего образования Кыргызской Республики. Бишкек, 2025.

2. Атанасян Л. С., Бутузов В. Ф., Кадомцев С. Б. Геометрия: 10-11 классы. М.: Просвещение, 2021. 320 с.

3. Бекбоев И. Б., Бөрүбаев А. А., Айылчиев А. А. Геометрия. 7–9 класс. Бишкек: Мектеп, 2018. 256 с.

4. Аликова А. М., Тайырова Р. У., Солтонкулова Ж. М. Вопросы обновления учебных программ в условиях текущих тенденций в школьном образовании // Вестник науки. 2025. Т. 2. №2 (83). С. 419-429.

5. Аликова А. М., Жунусакунова А. Д., Бусурманкулова Ж. А. Исследовательская и практическая направленность обучения математике // Эпоха науки. 2025. №44. С. 270-276.

6. Аликова А. М., Жунусакунова А. Д., Келдикеева М. Методические подходы к формированию ключевых и предметных компетентностей в условиях обновлённых стандартов // Эпоха науки. 2025. №44. С. 277-281.

7. Гусев В. А. Литвиненко В. Н., Мордкович А. Г. Практикум по элементарной математике. Геометрия. М.: Просвещение, 1992.

8. Полякова Т. А. Координатно-векторные методы в школьной геометрии // Математика в школе. 2020. №6. С. 18–24.

9. Hohenwarter M., Lavicza Z. The strength of the community: How GeoGebra can inspire

technology integration in mathematics // Model-centered learning: Pathways to mathematical understanding using GeoGebra. Rotterdam: SensePublishers, 2011. P. 7-12.

10. Кузьмин С. Г., Костюченко Р. Ю. Этапы решения стереометрических задач как основа методики обучения школьников их решению // Мир науки. Педагогика и психология. 2022. Т. 10. №3. С. 64.

References:

1. Gosudarstvennyj obrazovatel'nyj standart obshchego obrazovaniya Kyrgyzskoj Respubliki (2025). Bishkek.

2. Atanasyan, L. S., Butuzov, V. F., & Kadomtsev, S. B. (2021). Geometriya: 10-11 klassy. Moscow. (in Russian).

3. Bekboev, I. B., Bөrүbaev, A. A., & Ajylchiev, A. A. (2018). Geometriya. 7–9 klass. Bishkek.

4. Alikova, A. M., Tajyrova, R. U., & Soltonkulova, Zh. M. (2025). Voprosy obnovleniya uchebnykh programm v usloviyakh tekushchikh tendentsij v shkol'nom obrazovanii. *Vestnik nauki, 2*(2 (83)), 419-429. (in Russian).

5. Alikova, A. M., Zhunusakunova, A. D., & Busurmankulova, Zh. A. (2025). Issledovatel'skaya i prakticheskaya napravlennost' obucheniya matematike. *Epokha nauki,* (44), 270-276. (in Russian).

6. Alikova, A. M., Zhunusakunova, A. D., & Keldikeeva, M. (2025). Metodicheskie podkhody k formirovaniyu klyuchevykh i predmetnykh kompetentnostej v usloviyakh obnovlyonnykh standartov. *Epokha nauki,* (44), 277-281. (in Russian).

7. Gusev, V. A. Litvinenko, V. N., & Mordkovich, A. G. (1992). Praktikum po elementarnoj matematike. Geometriya. Moscow. (in Russian).

8. Polyakova, T. A. (2020). Koordinatno-vektornye metody v shkol'noj geometrii. *Matematika v shkole,* (6), 18–24. (in Russian).

9. Hohenwarter, M., & Lavicza, Z. (2011). The strength of the community: How GeoGebra can inspire technology integration in mathematics. In *Model-centered learning: Pathways to mathematical understanding using GeoGebra* (pp. 7-12). Rotterdam: SensePublishers.

10. Kuz'min, S. G., & Kostyuchenko, R. Yu. (2022). Etapy resheniya stereometricheskikh zadach kak osnova metodiki obucheniya shkol'nikov ikh resheniyu. *Mir nauki. Pedagogika i psikhologiya, 10*(3), 64. (in Russian).

Поступила в редакцию 06.02.2026 г.

Принята к публикации 15.02.2026 г.

Ссылка для цитирования:

Аликова А. М., Жунусакунова А. Д., Кобзарь Е. Методическая интеграция аналитических и цифровых инструментов при обучении решению геометрических задач // Бюллетень науки и практики. 2026. Т. 12. №5. С. 660-665. https://doi.org/10.33619/2414-2948/126/82

Cite as (APA):

Alikova, A., Zhunusakunova, A., & Kobzar, E. (2026). Methodological Integration of Analytical and Digital Tools in Teaching Solving Geometric Problems. *Bulletin of Science and Practice, 12*(5), 660-665. (in Russian). https://doi.org/10.33619/2414-2948/126/82