УДК 517.9 https://doi.org/10.33619/2414-2948/123/02

РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ МНОГОСКОРОСТНОЙ СИНГУЛЯРНО-ВОЗМУЩЕННОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ПЕРЕНОСА В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

*©**Омуров Т. Д.,** ORCID: 0000-0002-3758-9977, SPIN-код: 7631-1300, д-р физ.-мат. наук, Кыргызский национальный университет им. Ж. Баласагына, г. Бишкек, Кыргызстан, omurovtd@mail.ru*
*©**Саркелова Ж. Ж.,** ORCID: 0009-0002-0518-7217, SPIN-код: 6200-0572, Кыргызский национальный университет им. Ж. Баласагына, г. Бишкек, Кыргызстан, sjjyldyzaa@gmail.com*

SOLUTION OF A NONLINEAR MULTI-VELOCITY SINGULARLY PERTURBED INVERSE TRANSPORT PROBLEM IN AN UNBOUNDED DOMAIN

*©**Omurov T.,** ORCID: 0000-0002-3758-9977, SPIN-code: 7631-1300, Dr. habil., Kyrgyz National University named after J. Balasagyn, Bishkek, Kyrgyzstan, omurovtd@mail.ru*
*©**Sarkelova Zh.,** SPIN-код: 6200-0572, ORCID: 0009-0002-0518-7217, Kyrgyz National University named after J. Balasagyn, Bishkek, Kyrgyzstan, sjjyldyzaa@gmail.com*

Аннотация. В теории задач математической физики, связанных с сингулярно возмущенными уравнениями, накоплены значительные фундаментальные результаты, посвящённые прежде всего прямым задачам и их аналитическому исследованию. Однако указанное в полной мере не относится к сингулярно-возмущённым обратным задачам переноса в неограниченной области, что и определяет актуальность исследования данной работы. Дополнительные трудности возникают при исследовании многоскоростных обратных задач переноса, поскольку реализация большинства известных методов их решения связана с необходимостью построения специальных координатных систем, зависящих от особенностей конкретных задач. Эти системы могут быть как прямоугольными декартовыми, в которых исходно формулируется задача, так и криволинейными, в которые осуществляется соответствующее преобразование. При этом требуются дополнительные условия на новые функции, при которых новые переменные связаны между собой определенными соотношениями, в зависимости от заданных областей. В данной статье исследуется n-скоростная сингулярно-возмущённая обратная задача переноса типа Каца в неограниченной области. Предлагаемый метод решения позволяет оставаться в декартовой системе координат независимо от числа переменных фазового пространства и тем самым существенно упрощает аналитическое исследование и расширяет возможности практического применения полученных результатов. Для сингулярно-возмущённой обратной задачи переноса типа Каца в неограниченной области результаты получены в весовом пространстве. Построение решения основано на модифицированном методе асимптотического характера. В рамках данного подхода доказаны оценки близости решений сингулярно-возмущённой обратной задачи и вырожденной обратной задачи в выбранном весовом пространстве.

Abstract. In the theory of problems of mathematical physics associated with singularly perturbed equations, a substantial body of fundamental results has been accumulated, primarily devoted to direct problems and their analytical investigation. However, this cannot be fully attributed to singularly perturbed inverse transport problems in an unbounded domain, which determines the relevance of the research presented in this work. Additional difficulties arise in the study of multi-velocity inverse transport problems, since the implementation of most known solution methods is associated with the need to construct special coordinate systems that depend on the specific features of the problem under consideration. These systems may be either rectangular Cartesian coordinates, in which the problem is originally formulated, or curvilinear coordinates to which an appropriate transformation is performed. In this case, additional conditions are required for new functions, in which new variables are related to each other by certain relationships, depending on the given areas. In this paper, an n-velocity singularly perturbed inverse Kac-type transport problem in an unbounded domain is investigated. The proposed solution method makes it possible to remain within the Cartesian coordinate system regardless of the number of phase space variables, thereby significantly simplifying the analytical study and expanding the possibilities for practical application of the obtained results. For a singularly perturbed inverse transport problem of the Katz type in an unbounded domain, results are obtained in weighted space. The solution is constructed using a modified asymptotic method. Within the framework of this approach, estimates of the proximity of solutions of a singularly perturbed inverse problem and a degenerate inverse problem in a selected weight space are proven.

Ключевые слова: уравнение переноса, многоскоростная обратная задача, единственность решения.

Keywords: transport equation, multi-velocity inverse problem, uniqueness of solution.

В теории переноса в области переменных частиц многоскоростные задачи переноса характеризуются зависимостью от числа простых координат без учёта временной переменной и др. [1, 4].

Такие задачи возникают при моделировании сложных физических процессов, в которых движение частиц осуществляется с несколькими характерными скоростями, что существенно усложняет математическое описание и анализ соответствующих моделей. Особенно заметно это проявляется при рассмотрении задач в неограниченных областях, где стандартные методы исследования оказываются недостаточно эффективными.

В настоящей работе рассматривается n-скоростная сингулярно-возмущенная обратная задача переноса в неограниченной области. При этом близость решений сингулярно-возмущенной обратной задачи (СВОЗ) и вырожденных обратных задач (ВОЗ) оценивается в весовом пространстве типа Гильберта $W_h^2(\Omega_0 = (0, T_0) \times R^n)$, когда априорная информация задается из$L^2(R^n)$.

Следует отметить, что, несмотря на наличие значительного числа фундаментальных работ по теории прямых задач математической физики, связанных с сингулярно-возмущёнными уравнениями (СВУ) и разработанные в них методы не могут быть непосредственно применены к исследованию указанных классов СВОЗ [2, 3, 5].

Поэтому в данной работе для решения n-скоростной СВОЗ переноса типа Каца [6] в неограниченной области предлагается алгоритм, позволяющий оставаться в декартовой системе координат независимо от числа координат. При этом предложенный подход является модификацией разработанного алгоритма асимптотического характера (АХ) [7].

Рассмотрим n-скоростную ОЗ переноса вида:

Т. 12. №2 2026
https://doi.org/10.33619/2414-2948/123

$$\varepsilon^{\beta}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(E^{1,1,\dots,1}_{(a_1,\dots,a_n)}U_\varepsilon\right)+U^2_\varepsilon(t,x_1,\dots,x_n)\right]+\lambda E^{1,1,\dots,1}_{(a_1,\dots,a_n)}U_\varepsilon+h_0(x_1,\dots,x_n)U_\varepsilon = Z_\varepsilon(x_1,\dots,x_n)f(t), \quad (1)$$

$$\begin{cases}(U^{(i)}_{\varepsilon t}(t,x_1,\dots,x_n)|_{t=0}=V^{(i)}_t(0,x_1,\dots,x_n)+(\sum_{j=1}^{n} 2a_jx_j\varepsilon^{-1})^i\,exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\sum_{j=1}^{n}x_j{}^2\right),\\ V^{(i)}_t(0,x_1,\dots,x_n)=\phi_i(x_1,\dots,x_n),(i=0,1),\ \ \forall(x_1,\dots,x_n)\in R^n,\end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases}(U^{1,1,\dots,1}_{(a_1,\dots,a_n)})|_{t=T}\equiv(U_{\varepsilon t}+\sum_{j=1}^{n} a_jU_{\varepsilon x_j})|_{t=T}=g_0(x_1,\dots,x_n)+g_\varepsilon(x_1,\dots,x_n),\\ (V_t+\sum_{j=1}^{n} a_jV_{x_j})_{t=T}=g_0(x_1,\dots,x_n),\ \ \forall(x_1,\dots,x_n)\in R^n,\end{cases} \quad (3)$$

при этом вводится информация относительно исходных данных в виде:

$$\begin{cases}||g_\varepsilon||_{L^2(R^n)}=\left(\iint_{R^n}|g_\varepsilon(x_1,\dots,x_n)|^2dQ\right)^{\frac{1}{2}}\le\Delta_1(\varepsilon),(dQ=dx_1\dots dx_n),\\ ||g_\varepsilon(x_1-a_1(t-s),\dots,x_n-a_n(t-s))||_{L^2(0,T)}=\\ =\left(\sup_{\bar\Omega_0}\int_0^t|\,g_\varepsilon(x_1-a_1(t-s),\dots,x_n-a_n(t-s))|^2ds\right)^{\frac{1}{2}}\le\Delta_2(\varepsilon),(\Delta_1,\Delta_2\le\Delta_0(\varepsilon)_{\varepsilon}\\ ||U_\varepsilon(0,x_1,\dots,x_n)-V(0,x_1,\dots,x_n)||_{L^2(R^n)}\le(2^{-1}\pi)^{\frac{1}{2}}\varepsilon^{\frac{1}{2}}=\gamma_0\varepsilon^{\frac{1}{2}},\\ E^{1,1,\dots,1}_{(a_1,\dots,a_n)}=\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{j=1}^{n} a_j\frac{\partial}{\partial x_j},\end{cases} \quad (4)$$

где $(U_\varepsilon, Z_\varepsilon)$ - неизвестные функции. В указанных условиях требуется показать близости решений СВОЗ и ВОЗ в $W^2_h(\Omega_0)$, здесь: $0<h_0(x),\ f(t),\ \phi_i(x), g_0(x), g_\varepsilon(x),\quad 0<a_j,\ \lambda=const,\ (j=\overline{1,n}),\ (x_1,\dots,x_n)=x\in R^n, 0<\beta<2^{-1}$- являются известными, причем

$$\begin{cases}h_0\equiv\sum_{j=1}^{n} h_j(x_j)+h(x);0\le h\le\tilde h=const,\ 0\le h_0\le\tilde h_0=const,\ \forall x\in R^n,\\ \left(\int_{R^n}h(x_1,\dots,x_n)dQ\right)^{\frac{1}{2}}\le\gamma_1=const;\ \sup_{[0,T]}|f^{(i)}(t)|\le f_0=const,\ (i=0,1),\\ f(0)=0,\ f(T)\ne0;\ \ M_0(T,\lambda,\varepsilon^\beta)=f(T)-\int_0^T exp\left(-\frac{\lambda}{\varepsilon^\beta}(T-s)\right)f'(s)ds\ne0,\\ \forall\varepsilon\in(0,1),\ (\varepsilon=0);\ \ 0<\lambda^{-1}=const<<1.\end{cases} \quad (5)$$

Материал и методы исследования

Интегрализация Вырожденный ОЗ

Известно, что при $\varepsilon=0$ из СВОЗ (1) - (3) следует ВОЗ:

$$E^{1,1,\dots,1}_{(a_1,\dots,a_n)}V(t,x_1,\dots,x_n)+\frac{1}{\lambda}h_0(x_1,\dots,x_n)V=\frac{1}{\lambda}\tilde Z(x_1,\dots,x_n)f(t), \quad (6)$$

$$V^{(i)}_t(0,x_1,\dots,x_n)=\varphi_i(x_1,\dots,x_n),(i=0,1),\ \forall(x_1,\dots,x_n)\in R^n, \quad (7)$$

Т. 12. №2 2026
https://doi.org/10.33619/2414-2948/123

$$\left(E^{1,1,\dots,1}_{(a_1,\dots,a_n)}V\right)|_{t=T} = g_0(x_1,\dots,x_n),\ \forall(x_1,\dots,x_n)\in R^n, \tag{8}$$

где вектор функция $\Phi = \left(V,\tilde{Z}\right)$ является неизвестным. Здесь $V(t,x),(x\in R^n)$ представляет собой n-скоростную функцию распределения, а известная неотрицательная функция $h_0(x), x\in R^n$ является частотой столкновений частиц с окружающей средой, причем электростатическое ускорение предполагается постоянным $0 < a \in R^n$. При этом функция $\tilde{Z}(x)f(t)\equiv\tilde{F}(t,x),(x\in R^n)$ описывает внутренние источники, где содержится коэффициентная неизвестная функция $\tilde{Z}(x),(x\in R^n)$. Поэтому исходная задача (1)-(3) является СВ моделью задачи (6)-(8). Аналагично обсуждая, в условиях (5), (7), (8) из уравнения (6) следует система:

$$\begin{cases} E^{1,1,\dots,1}_{(a_1,\dots,a_n)}V + \dfrac{1}{\lambda}h_0(x_1,\dots,x_n)V = (f(T))^{-1}f(t)\left[g_0(x_1,\dots,x_n) + \dfrac{1}{\lambda}h_0V\right] \equiv B_0V, \\ \tilde{Z}(x_1,\dots,x_n) = (f(T))^{-1}[\lambda g_0(x_1,\dots,x_n) + h_0V(t,x_1,\dots,x_n)]. \end{cases} \tag{9}$$

Следовательно, на основе

$$V = Q(t,x_1,\dots,x_n)\,exp\left[-\left(\sum_{j=1}^{n}\ \frac{1}{\lambda a_j}\int_{-\infty}^{x_j}h_j(\tau_j)d\tau_j\right)\right], \tag{10}$$

с условием

$$Q|_{t=0} = \phi_0(x_1,\dots,x_n)\,exp\left[\sum_{j=1}^{n}\ \frac{1}{\lambda a_j}\int_{-\infty}^{x_j}h_j(\tau_j)d\tau_j\right] \equiv \psi_0(x_1,\dots,x_n),\ \forall(x_1,\dots,x_n)\in R^n, \tag{11}$$

из (6) имеем уравнение вида:

$$E^{1,1,\dots,1}_{(a_1,\dots,a_n)}Q = \left\{-\frac{1}{\lambda}h(x_1,\dots,x_n)V + (B_0V)(t,x_1,\dots,x_n)\right\}exp\left(\sum_{j=1}^{n}\ \frac{1}{\lambda a_j}\int_{-\infty}^{x_j}h_j(\tau_j)d\tau_j\right), \tag{12}$$

где (11), (12) - задача Коши относительно функции $Q(t,x), \forall x\in R^n$. Тогда из (2) следует:

$$Q = \psi_0(x_1 - a_1t,\dots,x_n - a_nt) + \int_0^t\left(exp\left(\sum_{j=1}^{n}\ \frac{1}{\lambda a_j}\int_{-\infty}^{x_j-a_jt}h_j(\tau_j)d\tau_j\right)\right)\times$$
$$\times\{-\lambda^{-1}h(x_1 - a_1(t-s),\dots,x_n - a_n(t-s))V(s,x_1 - a_1(t-s),\dots,x_n - a_n(t - s)) +$$
$$+(B_0V)(s,x_1 - a_1(t-s),\dots,x_n - a_n(t-s))\}ds. \tag{13}$$

Поэтому, подставляя (13) в (10), имеем

$$V = \phi_0(x_1 - a_1 t, \dots, x_n - a_n t)\, exp\left[-\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\lambda a_j}\int_{x_j - a_j t}^{x_j} h_j(\tau_j)d\tau_j\right)\right] + \tag{14}$$
$$+\int_0^t exp\left[-\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\lambda a_j}\int_{x_j - a_j(t-s)}^{x_j} h_j(\tau_j)d\tau_j\right)\right]\{ -\lambda^{-1}h(x_1 - a_1(t-s), \dots, x_n$$
$$- a_n(t-s))V(s, x_1 -$$
$$-a_1(t-s), \dots, x_n - a_n(t-s)) + (B_0V)(s, x_1 - a_1(t-s), \dots, x_n - a_n(t-s))\}ds$$
$$\equiv BV,$$

где (14) является нагруженным ИУ-2 относительно функции $V(t,x), x \in R^n$. Так как $0 < \lambda^{-1} = const << 1$, то оператор B допускает условия принципа Банаха [7], т.е. ИУ (14) однозначно разрешимо в $C(\bar{\Omega}_0)$. А это означает, что функция $V \in C^{1,1,\dots,1}(\bar{\Omega}_0)$ является известной. Тогда, с учетом (9), и функция $\tilde{Z}(x), x \in R^n$ считается известной. При этом предположим, что функции: $(V_t)_t$, $(V_{x_j})_t \in L^2(0,T), (j = \overline{1,n})$ для всех фиксированных $x \in R^n$,

$$\begin{cases} \| V_{t^2} \|_{L^2} = \left(\int_0^T | V_{t^2}(t,x)|^2\, dt\right)^{\frac{1}{2}} \le C_{00}, \forall x \in R^n, \\ \| V_{tx_j} \|_{L^2} = \left(\int_0^T | V_{tx_j}(t,x)|^2\, dt\right)^{\frac{1}{2}} \le C_{0j}, \forall x \in R^n, (C_0 = \max(C_{00}, C_{0j}), j = \overline{1,n}). \end{cases} \tag{15}$$

Лемма 1. При условиях (5), (7), (8) вырожденное УП (6), с учетом (9) однозначно разрешимо в $C^{1,1,\dots,1}(\bar{\Omega}_0)$, причем допускается условие (15) для функций V_{t^2}, V_{tx_j}, $(j = \overline{1,n})$.

Результаты и обсуждение

Однозначная разрешимость СВОЗ и близость решений СВОЗ и ВОЗ

Сперва, чтобы выяснить однозначной разрешимости изучаемой СВОЗ переноса, применим представление АХ, т.е.:

$$\begin{cases} U_\varepsilon(t, x_1, \dots, x_n) = V + \xi_\varepsilon + \exp\left(-\sum_{j=1}^{n} \frac{(x_j - a_j t)^2}{\varepsilon}\right), \\ Z_\varepsilon(x_1, \dots, x_n) = \tilde{Z} + \eta_\varepsilon(x_1, \dots, x_n). \end{cases} \tag{16}$$

Тогда из (1), с учетом (6), (16) вытекает:

$$\varepsilon^\beta \left\{\frac{\partial}{\partial t}\left(E^{1,1,\dots,1}_{(a_1,\dots,a_n)}\xi_\varepsilon\right) + \left[V + \xi_\varepsilon + \exp\left(-\sum_{j=1}^{n} \frac{(x_j - a_j t)^2}{\varepsilon}\right)\right]^2\right\} + \lambda E^{1,1,1}_{(a_1,a_2,a_3)}\xi_\varepsilon + \tag{17}$$
$$+h_0(x,y,z)\left(\xi_\varepsilon + \exp\left(-\sum_{j=1}^{n} \frac{(x_j - a_j t)^2}{\varepsilon}\right)\right) = \eta_\varepsilon(x_1, \dots, x_n) f(t) - \varepsilon^\beta \left(V_{t^2} + \sum_{j=1}^{n} a_j V_{tx_j}\right),$$

где $\left(V, \tilde{Z}\right)$ - решение ВОЗ (6) - (8), $\left(\xi_\varepsilon, \eta_\varepsilon\right)$— остаточные функции, которые содержатся в уравнении (17) с условиями:

$$\xi_t^{(i)}(t, x_1, \dots, x_n)|_{t=0} = 0,\ (i = 0,1), \tag{18}$$

$$\left(E^{1,1,\ldots,1}_{(a_1,\ldots,a_n)}\xi_\varepsilon\right)\big|_{t=T} = g_\varepsilon(x_1,\ldots,x_n),\quad \forall(x_1,\ldots,x_n)\in R^n. \tag{19}$$

Фактически остаточные функции $(\xi_\varepsilon, \eta_\varepsilon)$ определяются из ОЗ (17) - (19), где (19) является дополнительной информацией для этой задачи. Поэтому, чтобы выяснить однозначной разрешимости этой задачи, сначала, (17) преобразуем к виду:

$$E^{1,1,\ldots,1}_{(a_1,\ldots,a_n)}\xi_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^\beta}\int_0^t \exp\left(-\frac{\lambda}{\varepsilon^\beta}(t-s)\right)\{-h_0(x)\xi_\varepsilon(s,x)+\eta_\varepsilon(x)f(s)-\varepsilon^\beta[2\xi_\varepsilon(s,x)\times$$
$$\times\left(V(s,x)+\exp\left(-\sum_{j=1}^n \frac{(x_j-a_js)^2}{\varepsilon}\right)\right)+\xi_\varepsilon^2(s,x)]\}ds+Y_1(t,x,\varepsilon)\equiv\left(H_0\xi_\varepsilon\right)(t,x)+$$
$$+\frac{1}{\varepsilon^\beta}\int_0^t \exp\left(-\frac{\lambda}{\varepsilon^\beta}(t-s)\right)f(s)ds\times\eta_\varepsilon(x)+Y_1(t,x,\varepsilon),[(t,x)\in\bar{\Omega}_0, x\in R^n], \tag{20}$$

где функция $Y_1(t,x_1,\ldots,x_n,\varepsilon)$ определяется по формуле:

$$\begin{cases} Y_1\equiv\displaystyle\int_0^t \exp\left(-\frac{\lambda}{\varepsilon^\beta}(t-s)\right)\Bigg\{-\Big(V_{s^2}(s,x_1,\ldots,x_n)+\sum_{j=1}^n a_jV_{sx_j}(s,x_1,\ldots,x_n)\Big)- \\ -\left(V(s,x_1,\ldots,x_n)+\exp\left(-\displaystyle\sum_{j=1}^n\frac{(x_j-a_js)^2}{\varepsilon}\right)\right)^2\Bigg\}ds, \\ |Y_1|\le\varepsilon^{\frac{\beta}{2}}\left(C_0+C_0(\displaystyle\sum_{j=1}^n a_j)\right)\left(\frac{1}{2\lambda}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(T_0+1\right)^2\frac{1}{\lambda}\varepsilon^\beta=\delta_1(\varepsilon)\underset{\varepsilon\to0}{\to}0,(\sup_{\bar{\Omega}_0}|V|\le T_0). \end{cases} \tag{21}$$

Из уравнения (20), на основе (19) следует уравнение:

$$\eta_\varepsilon(x_1,\ldots,x_n)=M_0^{-1}(T,\lambda,\varepsilon^\beta)\left\{g_\varepsilon(x_1,\ldots,x_n)-Y_1(T,x_1,\ldots,x_n,\varepsilon)+\left(H_0\xi_\varepsilon\right)(T,x_1,\ldots,x_n)\right\}. \tag{22}$$

Следовательно, подставляя (22) в (20) получим:

$$E^{1,1,\ldots,1}_{(a_1,\ldots,a_n)}\xi_\varepsilon = Y_2(t,x_1,\ldots,x_n,\varepsilon)-(H_0\xi_\varepsilon)(t,x_1,\ldots,x_n)$$
$$+\frac{1}{\varepsilon^\beta}\int_0^t exp\left(-\frac{\lambda}{\varepsilon^\beta}(t-s)\right)f(s)ds\times M_0^{-1}(H_0\xi_\varepsilon)(T,x_1,\ldots,x_n), \tag{23}$$

где

$$Y_2\equiv Y_1+\frac{1}{\varepsilon^\beta}\int_0^t exp\left(-\frac{\lambda}{\varepsilon^\beta}(t-s)\right)f(s)ds$$
$$\times M_0^{-1}\{g_\varepsilon(x_1,\ldots,x_n)-Y_1(T,x_1,\ldots,x_n,\varepsilon)\}. \tag{24}$$

Поэтому, с учетом (18) из (23) имеем:

$$\xi_\varepsilon(t,x_1,\ldots,x_n)=\int_0^t\{-(H_0\xi_\varepsilon)(s,x_1-a_1(t-s),\ldots,x_n-a_n(t-s))+$$
$$+\frac{1}{\varepsilon^\beta}\int_0^s exp\left(-\frac{\lambda}{\varepsilon^\beta}(s-s')f(s')ds'\times M_0^{-1}(H_0\xi_\varepsilon)(T,x_1-a_1(t-s),\ldots,x_n-a_n(t\right.$$
$$-s))\}ds+$$
$$+Y(t,x_1,\ldots,x_n,\varepsilon)\equiv(P\xi_\varepsilon)(t,x_1,\ldots,x_n), \tag{25}$$

здесь

$$\begin{cases} Y \equiv \int_0^t \{Y_1(s, x_1 - a_1(t-s), \ldots, x_n - a_n(t-s), \varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon^\beta} \int_0^s \exp\left(-\frac{\lambda}{\varepsilon^\beta}(s-s')\right) f(s')ds' \times \\ \times M_0^{-1}[g_\varepsilon(x_1 - a_1(t-s), \ldots, x_n - a_n(t-s)) - Y_1(T, x_1 - a_1(t-s), \ldots, x_n - a_n(t-s), \varepsilon)]\}ds, \\ |Y| \le \gamma_2 \delta_1(\varepsilon) + \gamma_3 \left(\int_0^t |g_\varepsilon|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} \le \gamma_2 \delta_1(\varepsilon) + \gamma_3 \Delta_0(\varepsilon) = \delta_2(\varepsilon), \\ \gamma_2 = T + |M_0^{-1}| f_0 \lambda^{-1}; \ \gamma_3 = |M_0^{-1}| f_0 \lambda^{-1} \sqrt{T}. \end{cases} \tag{26}$$

Лемма 2. В условиях леммы 1 и системы

$$\begin{cases} L_P < 1, \\ P: S_{r_0} \to S_{r_0}, \quad \left(S_{r_0} = \{\xi_\varepsilon : |\xi_\varepsilon| \le r_0 = const, \ \forall (t, x_1, \ldots, x_n) \in \bar{\Omega}_0\}\right), \end{cases} \tag{27}$$

уравнение (25) однозначно разрешимо в $C(\bar{\Omega}_0)$, причем

$$||\xi_\varepsilon||_C \le \left(1 - L_p\right)^{-1} \delta_2(\varepsilon). \tag{28}$$

Следовательно, на основе (22) имеет место:

$$\begin{cases} ||\eta_\varepsilon(x_1, \ldots, x_n)||_{L_h^2(R^n)} \le |M_0^{-1}|(\tilde{h})^{\frac{1}{2}} \Delta_0(\varepsilon) + |M_0^{-1}|\delta_0(\varepsilon)\gamma_1 + \gamma_1 |M_0^{-1}| \gamma_4 (1 - L_p)^{-1} \times \\ \times \delta_2(\varepsilon) = \delta_3(\varepsilon), \ [\frac{1}{\lambda}\left(\tilde{h}_0 + 2(T_0 + 1) + (1 - L_p)^{-1}\delta_2(\varepsilon)\right) \le \gamma_4], \\ ||Z_\varepsilon - \tilde{Z}||_{L_h^2(R^n)} = ||\eta_\varepsilon||_{L_h^2(R^n)}. \end{cases} \tag{29}$$

В самом деле, результаты леммы 2 очевидны, так как при выполнении (27) для оператора P реализуются условия Банаха, а это означает, что уравнение (25) однозначно разрешимо в $C(\bar{\Omega}_0)$. Тогда, с учетом (22) имеем оценку вида (29). ЧиТД.

Далее, когда для исследования исходной многоскоростной СВОЗ применяется представления АХ (16), то относительно всех слагаемых функций (16) выполняются выводы лемм 1;2. Тогда, на основе (16) следует оценка вида:

$$|U_\varepsilon - V| \le ||\xi_\varepsilon||_C + exp\left(-\sum_{j=1}^{n} \frac{(x_j - a_j t)^2}{\varepsilon}\right). \tag{30}$$

Поэтому, учитывая условия лемм 1;2 и оценивая (30) в смысле нормы $L_h^p(\Omega_0)$, получим:

$$||U_\varepsilon - V||_{L_h^2} \le (1 - L_p)^{-1}\delta_2(\varepsilon)\gamma_1\sqrt{T} + \gamma_0\sqrt{\varepsilon \tilde{h} T} = \delta_4(\varepsilon) \underset{\varepsilon \to 0}{\to} 0. \tag{31}$$

В итоге, рассматривая совокупности результатов (29) и (31), и вместе с тем учитывая $\psi = \left(U_\varepsilon - V; Z_\varepsilon - \tilde{Z}\right)$, имеем оценку:

$$\begin{cases} W_h^2(\Omega_0) = \{(t, x_1, \ldots, x_n) \in \Omega_0 : \psi_1(t, x_1, \ldots, x_n) \in L_h^2(\Omega_0), \ \psi_2(x_1, \ldots, x_n) \in L_h^2(R^n)\}, \\ ||\psi||_{W_h^2(\Omega_0)} = ||U_\varepsilon - V||_{L_h^2(\Omega_0)} + ||Z - \tilde{Z}||_{L_h^2(R^n)} \le \delta_\varepsilon(\varepsilon) + \delta_4(\varepsilon) = \Delta(\varepsilon) \underset{\varepsilon \to 0}{\to} 0. \end{cases} \tag{32}$$

Т. 12. №2 2026
https://doi.org/10.33619/2414-2948/123

Теорема 1. В условиях лемм 1, 2 и (32) СВОЗ (1) - (4) имеет единственное решение по правилу (16), причем допустимая погрешность между решениями СВОЗ и ВОЗ в$W_h^2(\Omega_0)$ будет порядка $\Delta(\varepsilon)$.

Заключение

В изученной СВОЗ типа Каца в неограниченной области результаты получены в весовом пространстве $W_h^2(\Omega_0)$, когда априорные информации о входных данных задаются в $L^2(R^n)$. При этом решение построено на основе модификации разработанного метода АХ [7], где оценка близости решений СВОЗ и ВОЗ доказываются в $W_h^2(\Omega_0)$. Полученные выводы, могут в будущем позволить решать многоскоростные СВОЗ переноса, когда электростатические ускорения являются неотрицательными функциями.

Список литературы:

1. Ахиезер А. И. Кинетические уравнения Больцмана. Киев: ИТФ АН ССР, 1973. 29 с.

2. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно-возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973. 272 с.

3. Иманалиев М. И. Асимптотические методы в теории сингулярно-возмущенных интегро-дифференциальных систем. Фрунзе: Илим, 1972. 356 с.

4. Султангазин У. М. Дискретные нелинейные модели уравнения Больцмана. Алма-Ата: Наука, 1985. 192 с.

5. Тихонов А. Н. О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра // Математический сборник. 1948. Т. 22. №64. С. 193-204.

6. Frosali G., van der Mee C. V. M., Paveri-Fontana S. L. Conditions for runaway phenomena in the kinetic theory of particle swarms // Journal of mathematical physics. 1989. V. 30. №5. P. 1177-1186. https://doi.org/10.1063/1.528339

7. Omurov T. D., Sarkelova Z. Z. Inverse problems for singularly perturbed transfer equations of kac-boltzmann type // Advances in Differential Equations & Control Processes. 2019. V. 21. №2.

References:

1. Akhiezer, A. I. (1973). Kineticheskie uravneniya Bol'tsmana. Kiev. (in Russian).

2. Vasil'eva, A. B., & Butuzov, V. F. (1973). Asimptoticheskie razlozheniya reshenii singulyarno-vozmushchennykh uravnenii. Moscow. (in Russian).

3. Imanaliev, M. I. (1972). Asimptoticheskie metody v teorii singulyarno-vozmushchennykh integro-differentsial'nykh sistem. Frunze. (in Russian).

4. Sultangazin, U. M. (1985). Diskretnye n elineinye modeli uravneniya Bol'tsmana. Alma-Ata. (in Russian).

5. Tikhonov, A. N. (1948). O zavisimosti reshenii differentsial'nykh uravnenii ot malogo parametra. *Matematicheskii sbornik, 22*(64), 193-204. (in Russian).

6. Frosali, G., van der Mee, C. V., & Paveri-Fontana, S. L. (1989). Conditions for runaway phenomena in the kinetic theory of particle swarms. *Journal of mathematical physics*, *30*(5), 1177-1186. https://doi.org/10.1063/1.528339

7. Omurov, T. D., & Sarkelova, Z. Z. (2019). Inverse problems for singularly perturbed transfer equations of kac-boltzmann type. *Advances in Differential Equations & Control Processes*, *21*(2).

Поступила в редакцию 24.12.2025 г.

Принята к публикации 30.12.2025 г.

Ссылка для цитирования:

Омуров Т. Д., Саркелова Ж. Ж. Решение нелинейной многоскоростной сингулярно-возмущенной обратной задачи переноса в неограниченной области // Бюллетень науки и практики. 2026. Т. 12. №2. С. 24-32. https://doi.org/10.33619/2414-2948/123/02

Cite as (APA):

Omurov, T., & Sarkelova, Zh. (2026). Solution of a Nonlinear Multi-Velocity Singularly Perturbed Inverse Transport Problem in an Unbounded Domain. *Bulletin of Science and Practice, 12*(2), 24-32. (in Russian). https://doi.org/10.33619/2414-2948/123/02

