Т. 12. №2 2026
https://doi.org/10.33619/2414-2948/123

УДК 517.928 https://doi.org/10.33619/2414-2948/123/01

СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ С ЛОГАРИФМИЧЕСКИМИ ПОЛЮСАМИ НА ОДНОЙ ЛИНИИ

*©**Алыбаев К. С.**, ORCID: 0000-0002-7962-534X, SPIN-код: 2396-5503, д-р физ.-мат. наук, Жалал-Абадский государственный университет им. Б. Осмонова, г. Джалал-Абад, Кыргызстан, alybaevkurmanbek@rambler.ru*
*©**Эрматали уулу Б.**, ORCID: 0009-0007-7538-5354, SPIN-код: 6820-5273, Жалал-Абадский государственный университет им. Б. Осмонова, г. Джалал-Абад, Кыргызстан, ermatalievbayaman@gmail.com*

SINGULARLY PERTURBED EQUATIONS WITH LOGARITHMIC POLES ON A SINGLE LINE

*©**Alybaev K**, ORCID: 0000-0002-7962-534X, SPIN-код: 2396-5503, Dr. habil., Jalal-Abad State University named after B. Osmonov, Jalal-Abad, Kyrgyzstan, alybaevkurmanbek@rambler.ru*
*©**Ermatali uulu B**., ORCID: 0009-0007-7538-5354, SPIN-code: 6820-5273, Jalal-Abad State University named after B. Osmonov, Jalal-Abad, Kyrgyzstan, ermatalievbayaman@gmail.com*

Аннотация. Рассматривается система сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений с логарифмическими полюсами которая имеет положение равновесие. Устойчивость положения равновесия нарушается при одном значении медленной переменной. Исследуется явление задержки решения после потери устойчивости — ситуация, когда траектория остаётся вблизи неустойчивого равновесия на конечном интервале времени. Для анализа система преобразуется к комплексной форме, что позволяет свести её к интегральному уравнению специального вида. На основе построения области в комплексной плоскости и оценки применял метод последовательных приближений установлено существование решения и получена асимптотическая оценка на некотором отрезке, в части которого положение равновесия неустойчива. Полученная оценка подтверждает явление задержки решение вблизи неустойчивого положения равновесия. Полученные результаты уточняют влияние логарифмических полюсов на динамику системы и описывают область, где происходит задержка решения.

Abstract. Examines a system of singularly perturbed differential equations with logarithmic poles that possesses an equilibrium point. The stability of this equilibrium is lost at a certain value of the slow variable. The phenomenon of delay of the solution after the loss of stability is investigated—namely, a situation in which the trajectory remains close to the unstable equilibrium for a finite time interval. To carry out the analysis, the system is transformed into a complex form, which makes it possible to reduce it to an integral equation of a special type. Based on constructing a domain in the complex plane and applying appropriate estimates through the method of successive approximations, the existence of a solution is established and an asymptotic estimate is obtained on a segment where the equilibrium is partially unstable. The obtained estimate confirms the presence of the delay phenomenon of the solution near the unstable equilibrium. The results refine the understanding of how logarithmic poles influence the system's dynamics and describe the region in which the delay of the solution occurs.

Ключевые слова: сингулярные возмущения, логарифмический полюс, изменение устойчивости, асимптотические оценки, метод последовательных приближений, линии уровня монотонность.

Keywords: singular perturbations, logarithmic pole, change of stability, asymptotic estimates, method of successive approximations, level curves, monotonicity.

Постановка задачи.

Рассмотрим систему

$$\varepsilon x' = A(y)\tilde{x} + f(\tilde{x}), \tag{1}$$

$$y' = 1, \tag{2}$$

где $0 < \varepsilon$ – малый вещественный параметр; $x = (x_1, \dots, x_{2n}), \tilde{x} = (x_1 - y, x_2, x_3 - y, x_4, \dots, x_{2n-1} - y, x_{2n})$, $A(y) = diag\big(A_1(y), \dots, A_n(y)\big)$,

$$A_j(y) = \begin{pmatrix} \dfrac{y}{y^2 + \alpha_j^2} & \dfrac{\alpha_j}{y^2 + \alpha_j^2} \\ \dfrac{-\alpha_j}{y^2 + \alpha_j^2} & \dfrac{y}{y^2 + \alpha_j^2} \end{pmatrix}, j = 1, \dots, n,$$

$$0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n.$$

Система быстрых движений в [1, 2] точке $(y, 0, y, 0, \dots, y, 0)$ имеет положение равновесие, которая устойчива для $y < 0$ и неустойчива для $y > 0$. Таким образом при переходе значения $y = 0$, устойчивость положения равновесия меняется.

Определение. Если положение равновесия становится неустойчивым, но решение системы быстрых движений, сопровождающиее устойчивое положение равновесие, не сразу покидает возникщее неустойчивое положение равновесия, а в течении конечного времени остается вблизи него, будем говорить, происходит задержка решения, кратко З Р.

Задача. Исследовать решение (1) на задержку решения, когда положение равновесия становится неустойчивым.

Такие задачи ранее исследованы в [3-5]. Причем рассмотрены случаи, когда устойчивость положение равновесия определяется одной парой комплексно-сопряженных собственных значений матрицы-функции первого приближения.

В работе «Сингулярно возмущенные уравнения с особенностями в комплексных областях» рассмотрены случаи, когда матрицы-функции первого приближения имеют более одной пары комплексно-сопряженных собственных значений и все они вляют на устойчивость положение равновесия [9].

Все собственные значения имеют только нули. Случаи, когда собственные значения имеют несколько (> 2) полюсов ранее не исследованы. Исследование таких случаев составляет основное содержание данной работы.

Решение уравнения (2) возьмём $y = t$. Поставленную задачу решим при следующих предположениях:

У1. $f(\tilde{x}) \in Q(H)$ – пространство аналитических функций в области $H = \{(t, \tilde{x}), t \in D \subset C, \|\tilde{x}\| \leq C_1\}$, где $D = \{\, t \in C, |t| \leq r_0 \in R -$ множество действительных чисел$, C -$ множество комплексных чисел$\}$;

$$\|\tilde{x}\| = max\big|\tilde{x}_j\big|, j = 1, \dots, a^n;$$

 Т. 12. №2 2026
https://doi.org/10.33619/2414-2948/123

У2. $f(0) \equiv 0, \forall\left((\tilde{x}^1, \tilde{x}^2) \in H(\|f(\tilde{x}^1) - f(\tilde{x}^2)\| \le C_2\|\tilde{x}^1 - \tilde{x}^2\| \max(\|\tilde{x}^1\|; \|\tilde{x}^2\|)^2\right)$

Здесь и далее буквами $C_1, C_2, \ldots$ будем обозначать положительных постоянных не зависящих от ε.

Для решения системы (1) рассмотрим задачу

$$\|\tilde{x}(t_0, \varepsilon)\| \le C_3\varepsilon, \qquad (3)$$
$$\tilde{x}(t_0, \varepsilon) = (\tilde{x}_1^0, \tilde{x}_2^0, \tilde{x}_3^0, \tilde{x}_4^0).$$

1. Преобразование и замена уравнения

В системе (1) введем новые функции следующим образом

$$\tilde{x} = u = (u_1, u_2, \ldots, u_{2n}).$$

В новых переменных система (1) имеет вид

$$\varepsilon u' = A(y)u + f(u) - \varepsilon a, \qquad (4)$$

где $a = (1, 0,1,0, \ldots,1,0)$.

Для решения системы (4) получим, согласно (3), начальное условие

$$\|u(t_0, \varepsilon)\| \le C_3\varepsilon \qquad (5)$$

Систему (4) преобразуем так: в системе (4), попарно, возьмём уравнения с нечетным и последующее с четным номером. Уравнения с четными номерами умножив на $(\pm i)$ сложим с предыдущим уравнением с нечетным но мером и имеем уравнение

$$\varepsilon z' = \Lambda(t)z + f_1(z) - \varepsilon b, \qquad (6)$$

с начальным условием

$$\|z(t_0, \varepsilon)\| \equiv \|z^0\| \le C_4\varepsilon, \qquad (7)$$

где $\Lambda(t) = \left(\lambda_1(t), \lambda_2(t), \ldots, \lambda_{2n}(t)\right), b = (1,1, \ldots,1), z = (z_1, z_2, \ldots, z_{2n})$,

$$z^0 = (z_1^0, \ldots, z_{2n}^0).$$
$$z_{2j-1} = u_{2j-1} + iu_{2j}, \qquad z_{2j} = u_{2j-1} - iu_{2j};$$
$$\lambda_{2j-1} = \frac{1}{t + i\alpha_j}, \lambda_{2j} = \frac{1}{t - i\alpha_j}, j = 1, \ldots, n.$$

Систему уравнений (6) с начальным условием (7) заменим следующим интегральным

$$z = z^0 V(t_0, t, \varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t} V(\tau, t, \varepsilon)[-\varepsilon b + f_1(z)]d\tau, \qquad (8)$$

где $V(\tau, t, \varepsilon) = diag\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t \lambda_1(\tau)ds, \ldots, \ \frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t \lambda_{2n}(\tau)d\tau\right)$.

Для доказательства существование и оценки решения (8) применим метод последовательных приближений, которые определим следующим образом

$$z_m = z^0 V(t_0, t, \varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t} V(\tau, t, \varepsilon)[-\varepsilon b + f_1(z_{m-1})]d\tau, \quad z_0 \equiv 0, m = 1, 2, \ldots \ . \qquad (9)$$

2. Построение области

Для оценки и доказательство сходимости (9) используем метод изложенный в ряде работ [5, 9]. Построим некоторую область $D_0 \subset D$. Для этой цели используем линии уровня функции $Re\int_{t_0}^{t}\lambda_j(\tau)d\tau\ (j = 1, \dots, 2n)$. Введем обозначения

$$F_{2j-1} = ln\left(t + \alpha_j i\right), F_{2j} = ln\left(t - \alpha_j i\right), j = 1, \dots, 2n.$$
$$ReF_{2j-1} = \frac{1}{2}ln\left(t_1^2 + \left(t_2 + \alpha_j\right)^2\right), ReF_{2j} = \frac{1}{2}ln\left(t_1^2 + \left(t_2 - \alpha_j\right)^2\right).$$

Возьмём линию уровня

$$t_1^2 + (t_2 + \alpha_n)^2 = (\alpha_n + \alpha_1)^2.$$

Отсюда определяем кривую

$$t_2 = -\alpha_n + \sqrt{(\alpha_n + \alpha_1)^2 - t_1^2}. \qquad (К_1)$$

Проверим убывают ли функции ReF_{2j-1} $(j = 1, \dots, n-1)$ по кривой $(К_1)$. Для этого достаточно проверить функции

$$F_{2j-10} = t_1^2 + \left(t_2 + \alpha_j\right)^2.$$

Имеем

$$F_{2j-10} = t_1^2 + \left(-\alpha_n + \alpha_j + \sqrt{(\alpha_n + \alpha_1)^2 - t_1^2}\right)^2.$$

Отсюда получим

$$\left(F_{2j-10}\right)' = 2t_1 + 2\left(\alpha_n - \alpha_j - \sqrt{(\alpha_n + \alpha_1)^2 - t_1^2}\right) \times$$
$$\times \frac{t_1}{\sqrt{(\alpha_n + \alpha_1)^2 - t_1^2}} = \frac{2t_1\left(\alpha_n - \alpha_j\right)}{\sqrt{(\alpha_n + \alpha_1)^2 - t_1^2}}.$$

Отсюда следует функции F_{2j-10} $(j = 1, \dots, n-1)$ убывают по $(К_1)$ при $t_1 < 0$.

Теперь рассмотрим функцию

$$F_{10} = t_1^2 + (t_2 + \alpha_1)^2.$$

Линиями уровня этой функции являются концентрические окружности с центром в точке $(0;\ -\alpha_1)$.

Введем в рассмотрение линию уровня

$$t_1^2 + (t_2 + \alpha_1)^2 = (2\alpha_1 - \delta)^2,$$

где $0 < \delta$ – достаточно малое число не зависящая от ε.

Имеем

$$t_2 = -\alpha_1 + \sqrt{(2\alpha_1 - \delta)^2 - t_1^2}. \qquad (К_2)$$

Проверим монотонность функций ReF_{2j-1} $(j = 2, \dots, n)$ на кривой $(К_2)$. Как было сказано выше достаточно проверить функции

$$F_{2j-10} = t_1^2 + \left(t_2 + \alpha_j\right)^2, (j = 2, \dots, n).$$

Отсюда

$$\left(F_{2j-10}\right)'_{t_1} = 2t_1 + 2\left(\alpha_j - \alpha_1 + \sqrt{(2\alpha_1-\delta)^2 - t_1^2}\right) \times$$

$$\times \frac{-t_1}{\sqrt{(2\alpha_1-\delta)^2 - t_1^2}} = \frac{-2t_1\left(\alpha_j - \alpha_1\right)}{\sqrt{(2\alpha_1-\delta)^2 - t_1^2}}.$$

Следовательно функции F_{2j-10} убывают при $t_1 > 0$ по ($К_2$).

Теперь рассмотрим прямую

$$t_2 = -t_1 + \alpha_1 - \frac{\delta}{2}. \qquad (К_3)$$

На ($К_3$) проверим монотонность функций F_{2j-10} $(j = 1, \dots, n)$. Имеем

$$F_{2j-10} = t_1^2 + \left(-t_1 + \alpha_1 - \frac{\delta}{2} + \alpha_j\right)^2.$$

Отсюда $(F_{2j-10})' = 2t_1 + 2\left(t_1 - \alpha_j - \alpha_1 + \frac{\delta}{2}\right) = 2\left(2t_1 - \alpha_j - \alpha_1 + \frac{\delta}{2}\right) = 4\left(t_1 - \frac{\alpha_j + \alpha_1 - \frac{\delta}{2}}{2}\right)$. Значить при

$$t_1 < \frac{\alpha_j + \alpha_1 - \frac{\delta}{2}}{2} \qquad (10)$$

функции F_{2j-10} $(j = 1, \dots, n)$ убывают.

Найдем верхнюю границу изменения t_1 по ($К_3$). Эта граница определяется абциссой точки пересечения прямой ($К_3$) и кривой ($К_2$) т.е.

$$-\alpha_1 + \sqrt{(2\alpha_1-\delta)^2 - t_1^2} = -t_1 + \alpha_1 - \frac{\delta}{2}.$$

Отсюда имеем

$$(2\alpha_1-\delta)^2 - t_1^2 = \left(t_1 - \left(2\alpha_1 - \frac{\delta}{2}\right)\right)^2,$$

$$(2\alpha_1-\delta)^2 - t_1^2 = t_1^2 - 2t_1\left(2\alpha_1 - \frac{\delta}{2}\right) + \left(2\alpha_1 - \frac{\delta}{2}\right)^2,$$

$$t_1^2 - t_1\left(2\alpha_1 - \frac{\delta}{2}\right) + \frac{1}{2}\left[\left(2\alpha_1 - \frac{\delta}{2}\right)^2 - (2\alpha_1-\delta)^2\right] = 0,$$

$$t_{1(1,2)} = \alpha_1 - \frac{\delta}{4} \pm \sqrt{\left(\alpha_1 - \frac{\delta}{4}\right)^2 - \frac{1}{2}\left[\left(2\alpha_1 - \frac{\delta}{2}\right)^2 - (2\alpha_1-\delta)^2\right]}.$$

Возьмём

$$t_{1(1)} = \alpha_1 - \frac{\delta}{4} - \sqrt{\left(\alpha_1 - \frac{\delta}{4}\right)^2 - \frac{\left(2\alpha_1 - \frac{\delta}{2}\right)^2 - (2\alpha_1-\delta)^2}{2}}.$$

Т. 12. №2 2026
https://doi.org/10.33619/2414-2948/123

При достаточно малых значениях подкоренное выражение положительна и

$$t_{1(1)} < \alpha_1 - \frac{\delta}{4}.$$

Отсюда следует, что условие (10) выполняется в части (К_3) ограниченный точками A_1, A_2 (Рисунок).

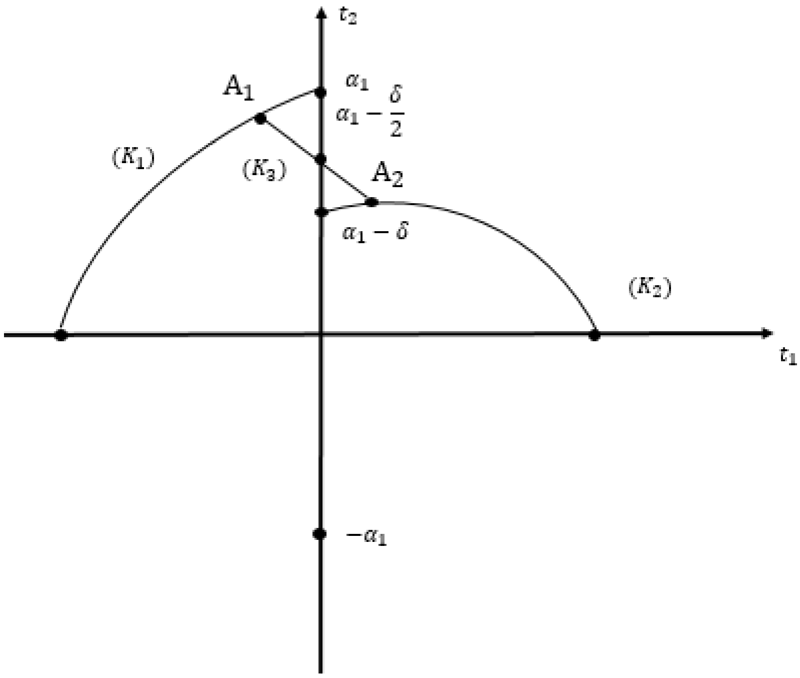

Рисунок. Кривые $(\text{К}_1), (\text{К}_2), (\text{К}_3)$ и отрезок A_1A_2

Кривую составленную из $(\text{К}_1), (\text{К}_2), (\text{К}_3)$ обозначим (К). (К) соединяет точки $(t_0; 0)$, где $t_0 = -\sqrt{(\alpha_n + \alpha_1)^2 - \alpha_1^2}, T_0 = \sqrt{(2\alpha_1 - \delta)^2 - \alpha_1^2}$.

Определим кривую $(\overline{\text{К}})$, симметричную (К), относительно действительной оси. Далее симметрию будем понимать так. Область, ограниченный (К) и $(\overline{\text{К}})$ обозначим D_0.

Последовательные приближения рассмотрим в D_0. Поставим задачу оценки и доказательство сходимости последовательных приближений. Для реализации этой задачи выберем пути интегрирования.

$\forall t \in D_0$ для компонент: z_{2j-1m} $(j = 1, \dots, n)$ путь состоит из части (К) соединяющего точки t_0 и $\tilde{t} \in (\text{К})$ и прямолинейного отрезка соединяющего точки $\tilde{t} = t_1 + \tilde{t}_2$ и

$t = \tilde{t}_1 + it_2 \in D_0$; z_{2jm} $(j = 1, \dots, n)$ путь выбирается симметричным к пути для z_{2j-1m}.

Сначала проведем оценку последовательных приближений. Справедливо следующее утверждение:

У. По выбранным путям функции $ReF_j(t)$ $(j = 1, 2, \dots, 2n)$ не возростают и это обеспечивает ограниченность

$$J_0 = exp\frac{F_j(t) - F_j(t_0)}{\varepsilon}, J_1 = \int_{t_0}^{t} exp\frac{F_j(t) - F_j(\tau)}{\varepsilon} d\tau.$$

Справедливость этого утверждения вытекает из проведеннных геометрических построений.

Т. 12. №2 2026
https://doi.org/10.33619/2414-2948/123

Оценим первые приближения. Имеем

$$z_1 = z^0 V(t, t_0, \varepsilon) - b \int_{t_0}^{t} V(\tau, t, \varepsilon) d\tau.$$

Отсюда, интеграл в правой части, проинтегрируем по часьтям. Область D_0 не содержит полюсов функций $F_j(t)$ и это можно проделать.

Для z_1 имеем оценку

$$\|z_1\| \leq C_5 \varepsilon. \tag{11}$$

Пусть справедлива оценка

$$\|z_m\| \leq \alpha_m(\varepsilon), \quad t \in D_0 \tag{12}$$

где $\alpha_m(\varepsilon)$ – некоторая положительная функция от ε и $\alpha_1(\varepsilon) \leq C_5 \varepsilon$.

Имеем

$$\|z_{m+1}(\varepsilon)\| \leq \|z_1\| + \frac{1}{\varepsilon} \left| \int_{t_0}^{t} \|V(\tau, t, \varepsilon)\| \|f_1(z_{m-1})\| d\tau \right| \leq$$

$$\leq C_5 \varepsilon + \frac{C_2}{\varepsilon} \int_{t_0}^{t} \|(z_{m-1}\|^3 \|V(\tau, t, \varepsilon)\| d\tau \leq$$

$$\leq C_5 \varepsilon + \frac{C_2}{\varepsilon} \alpha_m^3(\varepsilon) \left| \int_{t_0}^{t} \|V(\tau, t, \varepsilon)\| d\tau \right|.$$

Если учесть У. то

$$\left| \int_{t_0}^{t} \|V(\tau, t, \varepsilon)\| d\tau \right| \leq C_0.$$

Тогда

$$\|z_{m+1}\| \leq C_5 \varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} C_0 C_2 \alpha_m^3(\varepsilon).$$

Таким образом

$$\alpha_{m+1}(\varepsilon) = C_5 \varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} C_0 C_2 \alpha_m^3(\varepsilon).$$

Отсюда получим

$$\alpha_2(\varepsilon) = C_5 \varepsilon + C_0 C_2 C_5^3 \varepsilon^2 = \varepsilon(C_5 + C_0 C_2 C_5^3 \varepsilon).$$

Пусть $C_5 + C_0 C_2 C_5^3 \varepsilon \leq C_6$ или $\varepsilon < \frac{C_6 - C_5}{C_0 C_2 C_5^3}$,

тогда $\alpha_2(\varepsilon) \leq C_6 \varepsilon$. $\alpha_3(\varepsilon) \leq C_5 \varepsilon + C_0 C_2 C_6^3 \varepsilon^2 = \varepsilon(C_5 + C_0 C_2 C_6^3 \varepsilon)$.

Предположив

$$\varepsilon < \frac{C_6 - C_5}{C_0 C_2 C_6^3}, \tag{13}$$

Получим $\alpha_3(\varepsilon) \leq C_6 \varepsilon$.

Продолжив процесс, при условии (13), имеем $\alpha_{m+1}(\varepsilon) \leq C_6 \varepsilon$.

Т. 12. №2 2026
https://doi.org/10.33619/2414-2948/123

Тогда:

$$\|z_{m+1}\| \le C_6\varepsilon, m = 0, 1, \dots; t \in D_0. \tag{14}$$

Теперь докажем равномерную сходимость последовательных приближений. Для этого оценим $\|z_{m+1} - z_m\|$.

Имеем

$$\|z_{m+1} - z_m\| \le \frac{C_2}{\varepsilon}\left|\int_{t_0}^{t} \|V(\tau, t, \varepsilon)\|\|z_m - z_{m-1}\| max\{\|z_m\|, \|z_{m-1}\|\}^2 d\tau\right|. \tag{15}$$

Пусть $\|z_m - z_{m-1}\| \le \beta_m(\varepsilon)$,

где $\beta_m(\varepsilon)$-некоторая положительная функция от ε, причем $\beta_1(\varepsilon) \le C_6\varepsilon$.

Согласно, сделанного предположения из (15) получим

$$\|z_{m+1} - z_m\| \le \frac{C_2}{\varepsilon}\beta_m(\varepsilon)C_6^2\varepsilon^2 C_0 = C_0C_2C_6^2\varepsilon\beta_m(\varepsilon).$$

Тогда

$$\beta_{m+1}(\varepsilon) = C_0C_2C_6^2\varepsilon\beta_m(\varepsilon), \beta_1(\varepsilon) \le C_6\varepsilon.$$

Далее, по индукции получим $\beta_{m+1}(\varepsilon) \le \frac{1}{C_0C_2C_6}(C_0C_2C_6^2\varepsilon)^{m+1}, m = 0, 1, \dots$.

Если $C_0C_2C_6^2\varepsilon < 1$, то ряд $\sum_{m=0}^{\infty}\|z_{m+1} - z_m\|$ равномерно сходится $\forall t \in D_0$, следовательно $\{z_m\}$ также сходится равномерно, в D_0, к некоторой функции $z(t, \varepsilon)$, которая является решением уравнения (8). Учитывая (14) для этого решения получим оценку

$$\|z(t, \varepsilon)\| \le C_6\varepsilon, t \in D_0. \tag{16}$$

Учитывая проведенные преобразование для решения задачи (1), (3) имеем оценку

$$\|\tilde{x}(t, \varepsilon)\| \le C_6\varepsilon, t \in D_0. \tag{17}$$

Таким образом доказана.

Теорема. Пусть рассматривается задача (1), (3) при условии У1., У2. Тогда существует некоторая область $D_0 \subset D$ и решение задачи (1), (3) определенное в D и для этого решения справедлива оценке (17).

Следствие. Если оценку (17) рассмотреть на действительной оси то справедлива оценка

$$\|\tilde{x}(t, \varepsilon)\| \le C_6\varepsilon, t_0 \le t \le T_0, \tag{18}$$

$$t_0 = \pm\sqrt{(\alpha_n + \alpha_1)^2 - \alpha_n^2}, T_0 = \sqrt{(2\alpha_1 - \delta)^2 - \alpha_1^2}.$$

Оценка (18) показывает, что задержка решения, около неустойчивого положения равновесия, происходит на отрезке времени $[0, T_0]$.

Список литературы:

1. Понтрягин Л. С., Мищенко Е. Ф. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений с малым параметром // Труды Математического института имени В. А. Стеклова. 1985. Т. 169. №0. С. 99-118.

2. Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х. Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания. М.: Наука, 1975.

3. Шишкова М. А. Рассмотрение одной системы дифференциальных уравнений с малым параметром при высших производных // Доклады Академии наук. 1973. Т. 209. №3. С. 576-579.

4. Нейштадт А. И. О затягивании потери устойчивости при динамических бифуркациях // Дифференциальные уравнения. 1987. Т. 23. №12. С. 2060-2067.

5. Алыбаев К. С. Метод линий уровня исследования сингулярно возмущенных уравнений при нарушении условия устойчивости // Вестник КГНУ. 2001. Т. 3. С. 190-200.

6. Alybaev K. S., Juraev A. M., Nurmatova M. N. Delay in solving autonomous singularly perturbed equations near an unstable equilibrium position // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2024. V. 45. №3. P. 912-921. https://doi.org/10.1134/S1995080224600791

7. Алыбаев К. С., Нурматова М. Н., Мусакулова Н. К. Методы исследования асимптотики решений сингулярно возмущенных уравнений в комплексных областях // Бюллетень науки и практики. 2024. Т. 10. №3. С. 14-27. https://doi.org/10.33619/2414-2948/100/01

8. Алыбаев К. С., Нурматова М. Н. Явление затягивания потери устойчивости в теории сингулярных возмущений // Бюллетень науки и практики. 2023. Т. 9. №12. С. 12-19. https://doi.org/10.33619/2414-2948/97/01

9. Эрматали уулу Б. Сингулярно возмущенные уравнения с особенностями в комплексных областях // Бюллетень науки и практики. 2025. Т. 11. №11. С. 12-18. https://doi.org/10.33619/2414-2948/120/01

10. Алыбаев К. С., Нарымбетов Т. К., Матанов Ш. М., Эрматали уулу Б. Сравнительный анализ методов асимптотической оценки интегралов содержащих большой параметр // Бюллетень науки и практики. 2025. Т. 11. №2. С. 19-30. https://doi.org/10.33619/2414-2948/111/02

References:

1. Pontryagin, L. S., & Mishchenko, E. F. (1985). Nekotorye voprosy teorii differentsial'nykh uravnenii s malym parametrom. *Trudy Matematicheskogo instituta imeni VA Steklova, 169*(0), 99-118. (in Russian).

2. Mishchenko, E. F., & Rozov, N. Kh. (1975). Differentsial'nye uravneniya s malym parametrom i relaksatsionnye kolebaniya. Moscow. (in Russian).

3. Shishkova, M. A. (1973). Rassmotrenie odnoi sistemy differentsial'nykh uravnenii s malym parametrom pri vysshikh proizvodnykh. *Doklady Akademii nauk, 209*(3), 576-579. (in Russian).

4. Neishtadt, A. I. (1987). O zatyagivanii poteri ustoichivosti pri dinamicheskikh bifurkatsiyakh. *Differentsial'nye uravneniya, 23*(12), 2060-2067. (in Russian).

5. Alybaev, K. S. (2001). Metod linii urovnya issledovaniya singulyarno vozmushchennykh uravnenii pri narushenii usloviya ustoichivosti. *Vestnik KGNU, 3*, 190-200. (in Russian).

6. Alybaev, K. S., Juraev, A. M., & Nurmatova, M. N. (2024). Delay in solving autonomous singularly perturbed equations near an unstable equilibrium position. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, *45*(3), 912-921. https://doi.org/10.1134/S1995080224600791

7. Alybaev, K., Nurmatova, M., & Musakulova, N. (2024). Methods for Studying Asymptotics of Solutions to Singularly Perturbed Equations in Complex Domains. *Bulletin of Science and Practice, 10*(3), 14-27. (in Russian). https://doi.org/10.33619/2414-2948/100/01

8. Alybaev, K., & Nurmatova, M. (2023). The Phenomenon of Delaying Loss of Stability in the Theory of Singular Perturbations. *Bulletin of Science and Practice, 9*(12), 12-19. (in Russian). https://doi.org/10.33619/2414-2948/97/01

9. Ermatali uulu, B. (2025). Singularly Perturbed Equations with Singularities in Complex Domains. *Bulletin of Science and Practice, 11*(11), 12-18. (in Russian). https://doi.org/10.33619/2414-2948/120/01

Т. 12. №2 2026
https://doi.org/10.33619/2414-2948/123

10. Alybaev, K, Narymbetov, T., Matanov, S., Ermatali uulu, B. (2025). Functions of a Complex Variable with a Large Parameter and Construction of Regions. *Bulletin of Science and Practice, 11*(2), 19-30. (in Russian). https://doi.org/10.33619/2414-2948/111/02 (in Russian).

Поступила в редакцию
08.12.2025 г.

Принята к публикации
21.12.2025 г.

Ссылка для цитирования:

Алыбаев К. С., Эрматали уулу Б. Сингулярно возмущенные уравнения с логарифмическими полюсами на одной линии // Бюллетень науки и практики. 2026. Т. 12. №2. С. 14-23. https://doi.org/10.33619/2414-2948/123/01

Cite as (APA):

Alybaev, K, & Ermatali uulu, B. (2026). Singularly Perturbed Equations with Logarithmic Poles on a Single Line. *Bulletin of Science and Practice, 12*(2), 14-23. (in Russian). https://doi.org/10.33619/2414-2948/123/01