ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ / NATURAL SCIENCES

УДК 517.946.9 https://doi.org/10.33619/2414-2948/122/01

ОБ ОДНОМ ОСОБОМ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

*©**Кутунаев Ж. Н.**, SPIN-код: 3850-1610, канд. физ.-мат. наук, Ошский технологический университет им. М. М. Адышева, г. Ош, Кыргызстан, zh.kutunaev@mail.ru*
*©**Маметов Э. Т.**, Ошский технологический университет им. М. М. Адышева, г. Ош, Кыргызстан*

ABOUT A SPECIAL SECOND-ORDER FUNCTIONAL DIFFERENTIAL EQUATION

*©**Kutunaev Zh.**, SPIN-code: 3850-1610, Ph.D., Osh Technological University named after M. M. Adyshev, Osh, Kyrgyzstan, zh.kutunaev@mail.ru*
*©**Mametov E.**, Osh Technological University named after M. M. Adyshev, Osh, Kyrgyzstan*

Аннотация. При отыскании решения краевых, начальных или смешанных задач для вырождающихся функционально-дифференциальных уравнений, естественным образом возникают (особенно в случае, когда часть границы области задания уравнения освобождена от граничных условий) дифференциальные уравнения второго порядка. Показан способ восстановления одного типа гиперболического уравнения с переменными коэффициентами по его общему решению. Для уравнения с частными производными общее решение может быть найдено значительно реже и дело здесь обстоит сложнее. Отдельные уравнения гиперболического типа допускают общие решения в виде суммы бегущих волн. Математические модели многих технических задач и инженерных задач вынуждает рассматривать более общие уравнения гиперболического типа с переменными коэффициентами. Найти общее решение подобных уравнений с помощью ранее известными методами удается редко.

Abstract. When searching for solutions to boundary value, initial, or mixed problems for degenerate functional differential equations, second-order differential equations naturally arise (especially when part of the boundary of the domain of the equation is freed from boundary conditions). A method for reconstructing one type of hyperbolic equation with variable coefficients from its general solution is shown. For partial differential equations, the general solution can be found much less frequently and the situation here is more complicated. Individual hyperbolic type equations admit general solutions in the form of a sum of traveling waves. Mathematical models of many technical and engineering problems force us to consider more general hyperbolic equations with variable coefficients. It is rarely possible to find a general solution to such equations using previously known methods.

Ключевые слова: уравнение гиперболического типа, двух бегущих волн, дифференцирование, частные производные, совместная уравнения, функционально-дифференциальные уравнения.

Keywords: hyperbolic type equation, two traveling waves, differentiation, partial derivatives, joint equations, functional differential equations.

В настоящей работе рассмотрим сумму более общих двух бегущих волн и считая ее решением некоторого уравнения гиперболического типа, постараемся восстановить исходное уравнение. Рассмотрим сумму двух произвольных бегущих волн вида [4]:

$$e^{\psi_1(x)+\beta_1 t} f_1(\varphi(x)+t) + e^{\psi_2(x)+\beta_2 t} f_2(\varphi(x)-t), \tag{1}$$

где $\beta_1, \beta_2 -$ произвольные постоянные, f_1, f_2, ψ_1, ψ_2, $\varphi -$ произвольные, дважды непрерывно дифференцируемые функции своих аргументов, $\varphi'(x) \neq 0$.

Пусть бегущая волна (1) есть общее решение некоторого уравнения гиперболического типа [2]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_2 \frac{\partial u}{\partial x} + a_3 \frac{\partial u}{\partial t} + a_4 u, \tag{2}$$

где коэффициенты $a_1, a_2, a_3, a_4 -$ рассматриваются как некоторые пока неизвестные функции от x и подлежат определению. Дифференцируя функцию:

$$u(x,t) = e^{\psi_1(x)+\beta_1 t} f_1(\varphi(x)+t) + e^{\psi_2(x)+\beta_2 t} f_2(\varphi(x)-t), \tag{3}$$

Найдем:

$$\begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial x} = e^{\psi_1(x)+\beta_1 t}[\psi_1'(x) f_1(\varphi(x)+t) + \varphi'(x) f_1'(\varphi(x)+t)] \\ + e^{\psi_2(x)+\beta_2 t}[\psi_2'(x) f_2(\varphi(x)-t) + \varphi'(x) f_2'(\varphi(x)-t)],\end{gathered} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = {} & e^{\psi_1(x)+\beta_1 t}[\psi_1'(x) f_1(\varphi(x)+t) \\ & + \varphi'(x) f_1'(\varphi(x)+t)] + e^{\psi_1(x)+\beta_1 t}[\psi_1''(x) f_1(\varphi(x)+t) \\ & + \psi_1'(x)\varphi'(x) f_1'(\varphi(x)+t) + \varphi''(x) f_1'(\varphi(x)+t)\big(\varphi'(x)\big)^2 f_1''(\varphi(x)+t)] \\ & + \psi_2'(x) e^{\psi_2(x)+\beta_2 t}[\psi_2'(x) f_2(\varphi(x)-t) \\ & + \varphi'(x) f_2'(\varphi(x)-t)] + e^{\psi_2(x)+\beta_2 t}[\psi_2''(x) f_2(\varphi(x)-t) \\ & + \psi_2'(x)\varphi'(x) f_2'(\varphi(x)-t) + \varphi''(x) f_2'(\varphi(x)+t)\big(\varphi'(x)\big)^2 f_2''(\varphi(x)-t)],\end{aligned}$$

или, окончательно,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = {} & e^{\psi_1(x)+\beta_1 t}\left[\left(\left(\psi_1'(x)\right)^2 + \psi_1''(x)\right) f_1(\varphi(x)+t)\ \left(2\psi_1'(x)\varphi'(x) + \varphi''(x)\right) f_1'(\varphi(x) \right. \\ & \left. + t)\right] + \left(\varphi'(x)\right)^2 f_1'(\varphi(x)+t) + e^{\psi_2(x)+\beta_2 t} \times \\ & \times \left[\left(\left(\psi_2'(x)\right)^2 + \psi_2''(x)\right) f_2(\varphi(x)-t) + \left(2\psi_2'(x)\varphi'(x) + \varphi''(x)\right) f_2'(\varphi(x)-t)\right] + \\ & + \left(\varphi'(x)\right)^2 f_2'(\varphi(x)-t)]\end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial t} = e^{\psi_1(x)+\beta_1 t}[\beta_1 f_1(\varphi(x)+t) + f_1'(\varphi(x)+t)] \\ + +e^{\psi_1(x)+\beta_1 t}[\beta_1 f_1(\varphi(x)+t) + f_1'(\varphi(x)+t)],\end{gathered} \tag{6}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \beta_1 e^{\psi_1(x)+\beta_1 t}[\beta_1 f_1(\varphi(x)+t) + f_1'(\varphi(x)+t)] \\ + e^{\psi_1(x)+\beta_1 t}[\beta_1 f_1'(\varphi(x)+t) + f_1''(\varphi(x)+t)] + \\ +\beta_1 e^{\psi_2(x)+\beta_2 t}[\beta_2 f_2(\varphi(x)-t) - f_2'(\varphi(x)-t)] \\ + e^{\psi_2(x)+\beta_2 t}[-\beta_2 f_2'(\varphi(x)-t) + f_2''(\varphi(x)-t)],\end{gathered}$$

или, окончательно,

Т. 12. №1 2026
https://doi.org/10.33619/2414-2948/122

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=e^{\psi_1(x)+\beta_1 t}[\beta_1^2 f_1(\varphi(x)+t)+2\beta_1 f_1'(\varphi(x)+t)+f_1''(\varphi(x)+t)]+$$
$$+e^{\psi_2(x)+\beta_2 t}[\beta_2^2 f_2(\varphi(x)-t)-2\beta_2 f_2'(\varphi(x)-t)+f_2''(\varphi(x)-t)]. \quad (7)$$

Подставляя (3) – (7) в (2), получаем

$$\begin{aligned}
&e^{\psi_1(x)+\beta_1 t}[\beta_1^2 f_1(\varphi(x)+t)+2\beta_1 f_1'(\varphi(x)+t)+f_1''(\varphi(x)+t)]+e^{\psi_2(x)+\beta_2 t}[\beta_2^2 f_2(\varphi(x)-t)\\
&\quad-2\beta_2 f_2'(\varphi(x)-t)+f_2''(\varphi(x)-t)]\\
&\quad=a_1\{e^{\psi_1(x)+\beta_1 t}[((\psi_1'(x))^2+\psi_1''(x))+f_1(\varphi(x)+t)+\\
&\quad+\left(2\psi_1'(x)\varphi'(x)+\varphi''(x)\right)f_1'(\varphi(x)+t)+\left(\varphi'(x)\right)^2 f_1''(\varphi(x)+t)\Big]\\
&\quad+e^{\psi_2(x)+\beta_2 t}[((\psi_2'(x))^2+\psi_2''(x))+f_2(\varphi(x)-t)\\
&\quad+\left(2\psi_2'(x)\varphi'(x)+\varphi''(x)\right)f_2'(\varphi(x)-t)\\
&\quad+\left(\varphi'(x)\right)^2 f_2''(\varphi(x)-t)\Big]\Big\}+a_2\{e^{\psi_1(x)+\beta_1 t}[\psi_1'(x)f_1(\varphi(x)+t)\\
&\quad+\varphi'(x)f_1'(\varphi(x)+t)]+e^{\psi_2(x)+\beta_2 t}[\psi_2'(x)f_2(\varphi(x)-t)+\varphi'(x)f_2'(\varphi(x)-t)]\}+\\
&+a_3\{e^{\psi_1(x)+\beta_1 t}[\beta_1 f_1(\varphi(x)+t)+f_1'(\varphi(x)+t)]+e^{\psi_2(x)+\beta_2 t}[\beta_2 f_2(\varphi(x)-t)+f_2'(\varphi(x)-t)]\}\\
&\quad+a_4\{e^{\psi_1(x)+\beta_1 t}f_1(\varphi(x)+t)+e^{\psi_2(x)+\beta_2 t}f_2(\varphi(x)-t)\}.
\end{aligned}$$

Приравнивая коэффициенты при $f_1(\varphi(x)+t), f_1'(\varphi(x)+t), f_1''(\varphi(x)+t), f_2(\varphi(x)-t)$,

$f_2'(\varphi(x)-t), f_2''(\varphi(x)-t)$, в левых и правых частях последнего равенства, имеем

$$\left.\begin{aligned}
&f_1(\varphi(x)+t):\quad \beta_1^2=a_1\left(\left(\psi_1'(x)\right)^2+\psi_1''(x)\right)+a_2\psi_1'(x)+a_3\beta_1+a_4,\\
&f_1'(\varphi(x)+t):\quad 2\beta_1=a_1\left(2\psi_1'(x)\varphi'(x)+\varphi''(x)\right)+a_2\varphi'(x)+a_3,\\
&f_1''(\varphi(x)+t):\quad 1=a_1\left(\varphi'(x)\right)^2,\\
&f_2(\varphi(x)-t):\quad \beta_2^2=a_1\left(\left(\psi_2'(x)\right)^2+\psi_2''(x)\right)+a_2\psi_2'(x)+a_3\beta_2+a_4,\\
&f_2'(\varphi(x)-t):\quad -2\beta_2=a_1\left(2\psi_2'(x)\varphi'(x)+\varphi''(x)\right)+a_2\varphi'(x)-a_3,\\
&f_2''(\varphi(x)-t):\quad 1=a_1\left(\varphi'(x)\right)^2.
\end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Как видим здесь третье и шестое уравнения системы (8) одтнаковы. Следовательно, неизвестные функции a_1, a_2, a_3, a_4 приходится определить из системы уравнений

$$\left.\begin{aligned}
&1=a_1\left(\varphi'(x)\right)^2,\\
&2\beta_1=a_1\left(2\psi_1'(x)\varphi'(x)+\varphi''(x)\right)+a_2\varphi'(x)+a_3,\\
&-2\beta_2=a_1\left(2\psi_2'(x)\varphi'(x)+\varphi''(x)\right)+a_2\varphi'(x)-a_3,\\
&\beta_1^2=a_1\left(\left(\psi_1'(x)\right)^2+\psi_1''(x)\right)+a_2\psi_1'(x)+a_3\beta_1+a_4,\\
&\beta_2^2=a_1\left(\left(\psi_2'(x)\right)^2+\psi_2''(x)\right)+a_2\psi_2'(x)+a_3\beta_2+a_4,
\end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Из первых трех уравнений системы (9) легко определим функции $a_1,\ a_2,\ a_3$:

$$a_1=\frac{1}{(\varphi'(x))^2} \quad (10)$$

$$a_2 = \frac{\beta_1 - \beta_2}{\varphi'(x)} - \frac{\varphi'(x)[\psi_1'(x) + \psi_2'(x)] + \varphi''(x)}{\left(\varphi'(x)\right)^3}, \quad (11)$$

$$a_3 = \beta_1 + \beta_2 - \frac{\psi_1'(x) - \psi_2'(x)}{\varphi'(x)}. \quad (12)$$

Выбираем функцию $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$ таким образом, чтобы система (9) была совместной. Для этого найденные значения a_1, a_2, a_3 сначала подставляем в четвертое уравнение системы (9). Тогда получим:

$$\beta_1^2 = \frac{(\psi_1'(x))^2 + \psi_1''(x)}{(\varphi'(x))^2} + \left[\frac{\beta_1 - \beta_2}{\varphi'(x)} - \frac{\varphi'(x)[\psi_1'(x) - \psi_2'(x)]}{\left(\varphi'(x)\right)^3}\right]\psi_1'(x) +$$
$$+\beta_1\left[\beta_1 + \beta_2 - \frac{\psi_1'(x) + \psi_2'(x)}{\varphi'(x)}\right] + a_4,$$

откуда

$$a_4 = -\left\{\beta_1\beta_2 + \frac{\beta_1\psi_2'(x) - \beta_2\psi_1'(x)}{\varphi'(x)} + \frac{\psi_1''(x) - \psi_1'(x)\psi_2'(x)}{\left(\varphi'(x)\right)^2} - \frac{\varphi''(x)\psi_1'(x)}{\left(\varphi'(x)\right)^3}\right\}. \quad (13)$$

Подставляя теперь значения a_1, a_2, a_3 в пятое уравнение системы (9), имеем

$$\beta_2^2 = \frac{(\psi_2'(x))^2 + \psi_2''(x)}{(\varphi'(x))^2} - \left[\frac{\varphi'(x)[\psi_1'(x) + \psi_2'(x)]}{\left(\varphi'(x)\right)^3}\right]\psi_2'(x) + \beta_2\left[\beta_1 + \beta_2 - \frac{\psi_1'(x) - \psi_2'(x)}{\varphi'(x)}\right] + a_4,$$

откуда

$$a_4 = -\left\{\beta_1\beta_2 + \frac{\beta_1\psi_1'(x) - \beta_2\psi_2'(x)}{\varphi'(x)} + \frac{\psi_2''(x) - \psi_1'(x)\psi_2'(x)}{\left(\varphi'(x)\right)^2} - \frac{\varphi''(x)\psi_2'(x)}{\left(\varphi'(x)\right)^3}\right\}. \quad (14)$$

Из (13) и (14) видно, что система уравнений (9) становится совместной, если только имеет место равенство:

$$\frac{\psi_1''(x) - \psi_1'(x)\psi_2'(x)}{\left(\varphi'(x)\right)^2} - \frac{\varphi''(x)\psi_1'(x)}{\left(\varphi'(x)\right)^3} = \frac{\psi_2''(x) - \psi_1'(x)\psi_2'(x)}{\left(\varphi'(x)\right)^2} - \frac{\varphi''(x)\psi_2'(x)}{\left(\varphi'(x)\right)^3}. \quad (15)$$

Из (15) следует следующие равенства

$$\frac{\psi_1''(x)\varphi'(x) - \varphi''(x)\psi_1'(x) - [\psi_2''(x)\varphi'(x) - \varphi''(x)\psi_2'(x)]}{\left(\varphi'(x)\right)^3} = 0,$$

$$\frac{1}{\varphi'(x)}\left\{\frac{[\psi_1''(x) - \psi_2''(x)]\varphi'(x) - [\psi_1'(x) - \psi_2'(x)]\varphi''(x)}{\left(\varphi'(x)\right)^2}\right\} = 0,$$

или, окончательно,

$$\frac{1}{\varphi'(x)} \cdot \frac{d}{dx}\left[\frac{\psi_1'(x) - \psi_2'(x)}{\varphi'(x)}\right] = 0. \quad (16)$$

Очевидно, что (16) имеет место, если

$$\frac{\psi_1'(x) - \psi_2'(x)}{\varphi'(x)} = \mathrm{C}_1, \quad (17)$$

Т. 12. №1 2026
https://doi.org/10.33619/2414-2948/122

где C_1 − произвольная постоянная.

Итак, система уравнение (9) становится совместной, если функции $\varphi(x), \psi_1(x), \psi_2(x)$ связаны соотношением [3]:

$$\psi_2'(x) = \psi_1'(x) - C_1\varphi'(x),$$

или, окончательно

$$\psi_2(x) = \psi_1(x) - C_1\varphi(x) + C_2 \tag{18}$$

где $C_1,\ C_2$ − произвольные постоянные.

Используя (18), получаем теперь следующие выражения для a_2, a_3:

$$a_2 = \frac{\beta_1 - \beta_2}{\varphi'(x)} - \frac{2\psi_1'(x) - C_1\varphi'(x)}{(\varphi'(x))^2} - \frac{\varphi''(x)}{(\varphi'(x))^3} =$$

$$= \frac{1}{\varphi'(x)}\left[\left(\beta_1 - \frac{\psi_1'(x)}{\varphi'(x)}\right) - \left(\beta_2 + \frac{\psi_1'(x) - C_1\varphi'(x)}{\varphi'(x)}\right)\right] - \frac{\varphi''(x)}{(\varphi'(x))^3},$$

$$a_3 = \beta_1 + \beta_2 - C_1 = \left(\beta_1 - \frac{\psi_1'(x)}{\varphi'(x)}\right) - \left(\beta_2 + \frac{\psi_1'(x) - C_1\varphi'(x)}{\varphi'(x)}\right) = const.$$

Выражения для a_4 можно получить согласно (13) или (14). Например, согласно (13) получаем:

$$a_4 = -\left\{\beta_1\beta_2 + \frac{\beta_1(\psi_1'(x) - C_1\varphi'(x))}{\varphi'(x)} + \frac{\psi_1''(x) - \psi_1'(x)(\psi_1'(x) - C_1\varphi'(x))}{(\varphi'(x))^2} - \frac{\varphi''(x)\psi_1'(x)}{(\varphi'(x))^3}\right\} =$$

$$= \left\{\beta_1\beta_2 - \frac{\beta_2\psi_1'(x)}{\varphi'(x)} + \frac{\beta_1(\psi_1'(x) - C_1\varphi'(x))}{\varphi'(x)} + \right.$$

$$\left. + \frac{\varphi'(x)\left(\psi_1''(x) - (\psi_1'(x))^2\right) - \psi_1'(x)\left(\varphi''(x) - C_1(\varphi'(x))^2\right)}{(\varphi'(x))^3}\right\} =$$

$$= \left\{\beta_1\beta_2 - \frac{\beta_2\psi_1'(x)}{\varphi'(x)} + \frac{\beta_1(\psi_1'(x) - C_1\varphi'(x))}{\varphi'(x)} + \frac{1}{\varphi'(x)}\left[\frac{\psi_1''(x)\varphi'(x) - \psi_1'(x)\varphi''(x)}{(\varphi'(x))^2}\right] - \right.$$

$$\left. - \frac{\psi_1'(x)(\psi_1'(x) - C_1\varphi'(x))}{(\varphi'(x))^2}\right\} =$$

$$= -\left\{\beta_1\beta_2 - \frac{\beta_2\psi_1'(x)}{\varphi'(x)} + \frac{\beta_1(\psi_1'(x) - C_1\varphi'(x))}{\varphi'(x)} + \frac{1}{\varphi'(x)} \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{\psi_1'(x)}{\varphi'(x)}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{\psi_1'(x)}{\varphi'(x)}\left(\frac{(\psi_1'(x) - C_1\varphi'(x))}{\varphi'(x)}\right)\right\} =$$

$$= -\left\{\beta_2\left(\beta_1 - \frac{\psi_1'(x)}{\varphi'(x)}\right) + \left(\beta_1 - \frac{\psi_1'(x)}{\varphi'(x)}\right)\left(\frac{\psi_1'(x) - C_1\varphi'(x)}{\varphi'(x)}\right) + \frac{1}{\varphi'(x)} \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{\psi_1'(x)}{\varphi'(x)}\right)\right\} =$$

$$= -\left\{\left(\beta_1 - \frac{\psi_1'(x)}{\varphi'(x)}\right) + \left(\beta_2 + \frac{\psi_1'(x) - C_1\varphi'(x)}{\varphi'(x)}\right) + \frac{1}{\varphi'(x)} \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{\psi_1'(x)}{\varphi'(x)}\right)\right\}.$$

Итак, для a_1, a_2, a_3, a_4 окончательно имеем следующие выражение:

$$\left.\begin{aligned}
&a_1 = \frac{1}{(\varphi'(x))^2},\\
&a_2 = \frac{1}{\varphi'(x)}\left[\left(\beta_1 - \frac{\psi_1'(x)}{\varphi'(x)}\right) - \left(\beta_2 + \frac{\psi_1'(x) - C_1\varphi'(x)}{\varphi'(x)}\right)\right] - \frac{\varphi''(x)}{(\varphi'(x))^3},\\
&a_3 = \beta_1 + \beta_2 - C_1 = \left(\beta_1 - \frac{\psi_1'(x)}{\varphi'(x)}\right) - \left(\beta_2 + \frac{\psi_1'(x) - C_1\varphi'(x)}{\varphi'(x)}\right) = const.\\
&a_4 = -\left\{\left(\beta_1 - \frac{\psi_1'(x)}{\varphi'(x)}\right) + \left(\beta_2 + \frac{\psi_1'(x) - C_1\varphi'(x)}{\varphi'(x)}\right) + \frac{1}{\varphi'(x)}\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{\psi_1'(x)}{\varphi'(x)}\right)\right\}.
\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Вывод. Таким образом нами доказана следующая теорема. Уравнение гиперболического типа:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{(\varphi'(x))^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\\
+\left\{\frac{1}{\varphi'(x)}\left[\left(\beta_1 - \frac{\psi_1'(x)}{\varphi'(x)}\right) - \left(\beta_2 + \frac{\psi_1'(x) - C_1\varphi'(x)}{\varphi'(x)}\right)\right] - \frac{\varphi''(x)}{(\varphi'(x))^3}\right\}\frac{\partial u}{\partial x} +\\
+(\beta_1 + \beta_2 - C_1)\frac{\partial u}{\partial t}\\
-\left\{\left(\beta_1 - \frac{\psi_1'(x)}{\varphi'(x)}\right) + \left(\beta_2 + \frac{\psi_1'(x) - C_1\varphi'(x)}{\varphi'(x)}\right) + \frac{1}{\varphi'(x)}\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{\psi_1'(x)}{\varphi'(x)}\right)\right\}u
\end{aligned} \tag{20}$$

допускает общее решение вида

$$u(x,t) = e^{\psi_1(x)+\beta_1 t} f_1(\varphi(x)+t) + e^{(\psi_1(x) - C_1\varphi(x) + C_2)+\beta_2 t} f_2(\varphi(x)-t), \tag{21}$$

где $\beta_1, \beta_2, C_1, C_2 -$ произвольные постоянные числа, $\varphi, \psi_1, \psi_2, f_1, f_2 -$ произвольные, дважды непрерывно дифференцируемые функции своих аргументов, $\varphi'(x) \neq 0$.

Выбор величин $\beta_1, \beta_2, C_1, C_2$ и φ, ψ_1, ψ_2 позволяет получить различные уравнения, часто встречающихся в прикладных, технических и инженерных задачах.

Список литературы:

1. Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. Уравнения в частных производных математической физики. М.: Высш. школа, 1970. 710 с.

2. Аксенов А. П. Дифференциальные уравнения. М.: Юрайт, 2020. 601 с.

3. Зармаев А. А. Дифференциальные уравнения. СПб: Лань, 2016. 288 с.

4. Кутунаев Ж. Н. О восстановлении гиперболического уравнения по его общему решению // Известия Кыргызского государственного технического университетам им. И. Раззакова. 2006. №8. С. 96-101.

References:

1. Koshlyakov, N. S., Gliner, E. B., & Smirnov, M. M. (1970). Uravneniya v chastnykh proizvodnykh matematicheskoi fiziki. Moscow. (in Russian).

2. Aksenov, A. P. (2020). Differentsial'nye uravneniya. Moscow. (in Russian).

3. Zarmaev, A. A. (2016). Differentsial'nye uravneniya. St.Petersburg. (in Russian).

4. Kutunaev, Zh. N. (2006). O vosstanovlenii giperbolicheskogo uravneniya po ego obshchemu resheniyu. *Izvestiya Kyrgyzskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universitetam im. I. Razzakova,* (8), 96-101. (in Russian).

Поступила в редакцию 12.11.2025 г.

Принята к публикации 17.11.2025 г.

Ссылка для цитирования:

Кутунаев Ж. Н., Маметов Э. Т. Об одном особом функционально-дифференциальном уравнении второго порядка // Бюллетень науки и практики. 2026. Т. 12. №1. С. 12-18. https://doi.org/10.33619/2414-2948/122/01

Cite as (APA):

Kutunaev, Zh., & Mametov, E. (2026). About a Special Second-Order Functional Differential Equation. *Bulletin of Science and Practice, 12*(1), 12-18. (in Russian). https://doi.org/10.33619/2414-2948/122/01