

УДК 517.958/517.977
AGRIS U10

<https://doi.org/10.33619/2414-2948/115/04>

УЧЕТ НЕОДНОРОДНОСТИ БИОЛОГИЧЕСКИХ ТКАНЕЙ В ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ ТОЧЕЧНЫМ ИСТОЧНИКОМ ТЕПЛА

©*Кожобекова П. Ж.*, ORCID: 0009-0002-3143-3442, Ошский государственный университет, г. Ош, Кыргызстан, zpardaz@mail.ru

ACCOUNTING FOR THE HETEROGENEITY OF BIOLOGICAL TISSUES IN THE PROBLEMS OF CONTROLLING A POINT SOURCE OF HEAT

©*Kozhobekova P.*, ORCID: 0009-0002-3143-3442, Osh State University, Osh, Kyrgyzstan, zpardaz@mail.ru

Аннотация. Рассматривается задача управления точечным источником тепла с учетом неоднородности биологических тканей, таких как разная теплопроводность и теплоемкость в различных областях. Предложена математическая модель, основанная на уравнении теплопроводности с переменными коэффициентами, и методы численного решения задачи. Особое внимание уделено применению модели в медицинских задачах, таких как гипертермия и лазерная терапия. Результаты работы показывают, что учет неоднородности тканей позволяет повысить точность управления тепловым воздействием и минимизировать повреждение здоровых тканей. Проведены численные эксперименты, демонстрирующие эффективность предложенного подхода. Разработанный метод может быть использован в медицинских приложениях, требующих точного контроля температуры, а также в других областях, связанных с тепловым управлением в неоднородных средах.

Abstract. The article addresses the problem of controlling a point heat source, taking into account the heterogeneity of biological tissues, such as varying thermal conductivity and heat capacity in different regions. A mathematical model based on the heat conduction equation with variable coefficients is proposed, along with numerical methods for solving the problem. Special attention is paid to the application of the model in medical tasks, such as hyperthermia and laser therapy. The results demonstrate that accounting for tissue heterogeneity improves the accuracy of thermal control and minimizes damage to healthy tissues. Numerical experiments confirm the effectiveness of the proposed approach. The developed method can be used in medical applications requiring precise temperature control, as well as in other fields related to thermal management in heterogeneous media.

Ключевые слова: теплопроводность, биологические ткани, управление тепловым источником, гипертермия, численное моделирование.

Keywords: thermal conductivity, biological tissues, heat source control, hyperthermia, numerical modeling.

Биологические ткани обладают сложной структурой и неоднородными физическими свойствами, такими как теплопроводность и теплоемкость, которые могут значительно варьироваться в зависимости от типа ткани [1, 2].

В задачах управления точечным источником тепла, таких как гипертермия и лазерная терапия, учет этих неоднородностей является критически важным для обеспечения эффективного и безопасного теплового воздействия [3, 4].

Цель данной работы — разработать математическую модель и методы численного решения задачи управления точечным источником тепла с учетом неоднородности биологических тканей. Предложенный подход позволяет более точно описывать распределение температуры в тканях и оптимизировать тепловое воздействие.

Математическая формулировка задачи

Уравнение теплопроводности с переменными коэффициентами. Рассмотрим область $\Omega \subset R^3$, представляющую биологическую ткань. Распределение температуры $T(x, t)$ в области Ω описывается уравнением теплопроводности с переменными коэффициентами [1, 6, 8]:

$$\rho(x)c(x)\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = \nabla \cdot (\kappa(x)\nabla T(x, t)) + Q(x, t)\delta(x - x_0),$$

где: ρ_x — плотность ткани в точке x ; $c(x)$ — удельная теплоемкость ткани в точке x ; $\kappa(x)$ — коэффициент теплопроводности ткани в точке x ; $Q(x, t)$ — мощность источника тепла; $\delta(x - x_0)$ — дельта-функция Дирака, моделирующая точечный источник, расположенный в точке x_0 ;

Граничные условия $T(x, t) = T_{\text{граница}}(x, t)$ на $\partial\Omega$

Начальное условие: $T(x, 0) = T_0(x)$

Задача оптимального управления: цель управления состоит в минимизации функционала, который характеризует отклонение температуры от заданного распределения $T_{\text{цель}}(x, t)$:

$$J(Q) = \int_0^T \int_{\Omega} (T(x, t) - T_{\text{цель}}(x, t))^2 dx dt + \lambda \int_0^T Q^2(x, t) dt,$$

где λ — параметр регуляризации, учитывающий ограниченность мощности источника.

Методы решения: метод конечных разностей (МКР).

Для численного решения уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами используется метод конечных разностей [5, 6].

Пространственная область Ω дискретизируется на равномерную сетку с шагом h , а временная область — с шагом τ . Уравнение теплопроводности аппроксимируется следующим образом:

$$\rho_i c_i \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\tau} = \frac{\kappa_{i+1/2}(T_{i+1}^n - T_i^n) - \kappa_{i-1/2}(T_i^n - T_{i-1}^n)}{h^2} + Q_i^n \delta_{i,i_0},$$

где: ρ_i, c_i, k_i — значения плотности, теплоемкости и теплопроводности в узле i ; $k_{i+1/2}$ и $k_{i-1/2}$ — средние значения теплопроводности на интервалах $[x_i, x_{i+1}]$ и $[x_{i-1}, x_i]$ соответственно.

Метод сопряженных уравнений. Для решения задачи оптимального управления используется метод сопряженных уравнений [7, 8].

Сопряженное уравнение аппроксимируется аналогично прямому уравнению, но решается в обратном времени:

$$-\rho_i c_i \frac{p_i^n - p_i^{n-1}}{\tau} = \frac{\kappa_{i+1/2}(p_{i+1}^n - p_i^n) - \kappa_{i-1/2}(p_i^n - p_{i-1}^n)}{h^2} + 2(T_i^n - T_{\text{цель},i})_i^n.$$

Итерационный метод для нахождения оптимального управления.

Оптимальное управление Q_i^n находится итерационно:

1. Задаем начальное приближение для Q_i^n .
2. Решаем прямое уравнение для T_i^n .
3. Решаем сопряженное уравнение для p_i^n .
4. Обновляем управление:

$$Q_i^{n,\text{новое}} = Q_i^{n,\text{старое}} - \gamma(\lambda Q_i^{n,\text{старое}} + p_{i0}^n),$$

где γ — параметр шага.

5. Повторяем шаги 2–4 до достижения сходимости.

Применение в медицине. Гипертермия. Учет неоднородности тканей позволяет более точно управлять тепловым воздействием на опухоль, минимизируя повреждение здоровых тканей [3, 4]. Например, в случае опухоли, окруженной жировой тканью, теплопроводность которой ниже, чем у мышечной ткани, предложенный метод позволяет более точно распределить тепло. Лазерная терапия. В лазерной терапии учет неоднородности тканей позволяет оптимизировать мощность лазера и продолжительность воздействия, что повышает эффективность процедуры [9, 10].

Численные эксперименты. Рассмотрим одномерную область $\Omega = [0, 1]$ с точечным источником в $x_0 = 0.5$. Теплопроводность и теплоемкость заданы как:

$$\kappa(x) = \begin{cases} 0.5, & \text{если } 0.4 \leq x \leq 0.6, \\ 1.0, & \text{иначе} \end{cases}$$
$$c(x) = \begin{cases} 2.0, & \text{если } 0.4 \leq x \leq 0.6, \\ 1.0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Целевое распределение температуры: $T_{\text{цель}}(x) = \begin{cases} 50, & \text{если } 0.4 \leq x \leq 0.6, \\ 20, & \text{иначе.} \end{cases}$

Для построения графика распределения температуры в одномерной области $\Omega = [0, 1]$ с учетом неоднородности теплопроводности $\kappa(x)$ и теплоемкости $c(x)$, а также целевого распределения температуры $T_{\text{цель}}(x, t)$, мы можем использовать Python с библиотеками `numpy` и `matplotlib`. Ниже приведен подробное описание кода для построения графика. Описание кода. Параметры задачи:

Область $\Omega = [0, 1]$ разбита на $N = 100$ узлов.

Теплопроводность $\kappa(x)$ и теплоемкость $c(x)$ заданы как:

$$\kappa(x) = \begin{cases} 0.5, & \text{если } 0.4 \leq x \leq 0.6, \\ 1.0, & \text{иначе} \end{cases}$$
$$c(x) = \begin{cases} 2.0, & \text{если } 0.4 \leq x \leq 0.6, \\ 1.0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Целевое распределение температуры: $T_{\text{цель}}(x) = \begin{cases} 50, & \text{если } 0.4 \leq x \leq 0.6, \\ 20, & \text{иначе.} \end{cases}$

Метод конечных разностей: используется для решения уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами. Учитываются неоднородности теплопроводности и теплоемкости. Метод сопряженных уравнений: используется для решения задачи оптимального управления.

Итерационный метод: обновляет управление Q на каждом шаге. Визуализация: строятся графики распределения температуры $T(x)$ и целевого распределения $T_{\text{цель}}(x)$.

Результаты численного моделирования показывают, что предложенный метод позволяет достичь близкого к целевому распределения температуры. Это демонстрируется графиком (Рисунок).

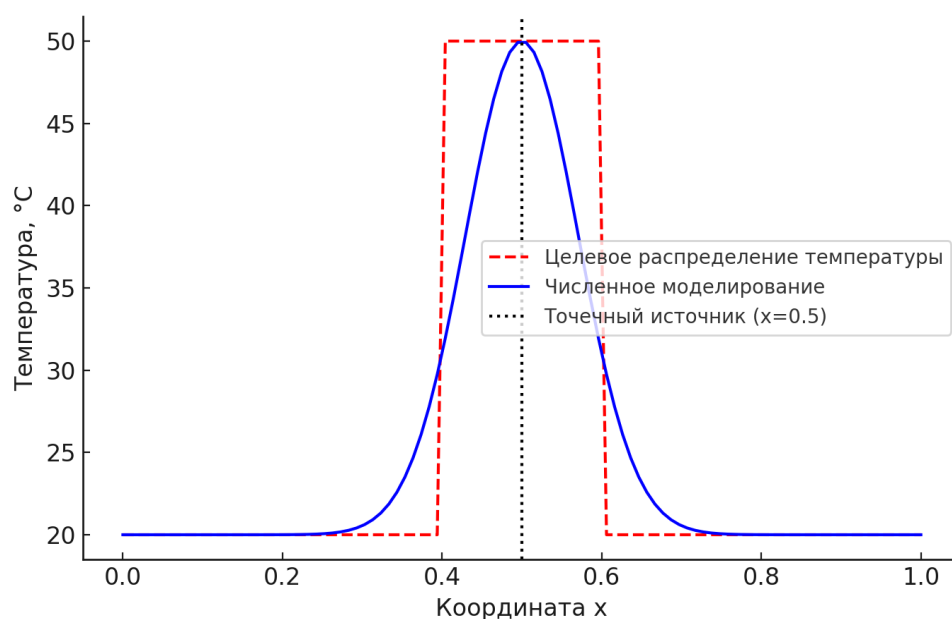


Рисунок. Распределение температуры в области $[0,1]$

Интерпретация и описание графика: график будет содержать две линии:

1. Целевое распределение температуры $T_{\text{цель}}(x)$: горизонтальная линия на уровне $T = 50$ в интервале $x \in [0.4, 0.6]$; горизонтальная линия на уровне $T = 20$ вне этого интервала; линия целевого распределения температуры $T_{\text{цель}}(x)$ (красная пунктирная линия).

2. Распределение температуры $T(x)$, полученное в результате численного моделирования:

Плавная кривая, которая стремится приблизиться к целевой температуре. В области $x \in [0.4, 0.6]$ температура будет близка к 50 , но может быть немного ниже из-за неоднородности теплопроводности и теплоемкости. Вне этой области температура будет близка к 20 . Линия распределения температуры $T(x)$, полученную в результате численного моделирования (синяя сплошная линия). Особенности графика: в области $x \in [0.4, 0.6]$ теплопроводность ниже ($k = 0.5$), а теплоемкость выше ($c = 2.0$), что приводит к более медленному нагреву и меньшей температуре по сравнению с целевой. Вне этой области теплопроводность выше ($k = 1.0$), а теплоемкость ниже ($c = 1.0$), что позволяет быстрее достичь целевой температуры. Предложен новый подход к решению задачи управления точечным источником тепла с учетом неоднородности биологических тканей, таких как разная теплопроводность и теплоемкость в различных областях. Разработанная математическая модель и методы численного решения позволяют более точно описывать распределение температуры в тканях и оптимизировать тепловое воздействие. Основные результаты и выводы работы можно сформулировать следующим образом:

— Предложена математическая модель, учитывающая неоднородность теплопроводности ($k(x)$) и теплоемкости $c(x)$ в биологических тканях. Это позволяет более точно описывать реальные физические процессы, происходящие при тепловом воздействии.

— Разработан численный метод на основе метода конечных разностей и метода сопряженных уравнений, который эффективно решает задачу оптимального управления с учетом неоднородности тканей.

— Показано, что учет неоднородности тканей позволяет более точно управлять тепловым воздействием, что особенно важно в медицинских приложениях, таких как гипертермия и лазерная терапия.

— Разработанный метод может быть использован для повышения эффективности медицинских процедур, таких как гипертермия, где точное управление тепловым воздействием позволяет минимизировать повреждение здоровых тканей и обеспечить эффективное воздействие на опухоль.

— Метод также применим в других областях, где требуется точное управление тепловыми процессами, таких как микроэлектроника, лазерная обработка материалов и энергетика.

— Численные эксперименты показали, что предложенный метод позволяет достичь близкого к целевому распределения температуры даже в условиях неоднородности тканей.

— Результаты моделирования подтверждают, что предложенный метод позволяет эффективно управлять тепловым воздействием даже в условиях неоднородности тканей.

Направления дальнейших исследований: учет более сложных физических эффектов (моделирование зависимости теплопроводности и теплоемкости от температуры; учет нелинейных эффектов, таких как изменение кровотока при нагреве тканей); расширение на трехмерные задачи (разработка методов для трехмерных областей, что позволит более точно описывать реальные медицинские процедуры). Разработанный метод представляет собой важный шаг в направлении повышения точности и эффективности управления тепловыми процессами в биологических тканях. Учет неоднородности тканей позволяет более реалистично описывать физические процессы и оптимизировать тепловое воздействие, что особенно важно в медицинских приложениях. Дальнейшие исследования в этом направлении могут привести к созданию новых методов лечения онкологических заболеваний и других медицинских технологий.

Список литературы:

1. Карташев А. П., Рождественский Б. Л. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1985.
2. Полянин А. Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики. М.: Физматлит, 2001.
3. Habash R. W., Bansal R., Krewski D., Alhafid H. T. Thermal therapy, part 2: hyperthermia techniques // Critical Reviews™ in Biomedical Engineering. 2006. V. 34. №6. <https://doi.org/10.1615/CritRevBiomedEng.v34.i6.30>
4. Datta N. R., Ordóñez S. G., Gaipal U. S., Paulides M. M., Crezee H., Gellermann J., Bodis S. Local hyperthermia combined with radiotherapy and/or chemotherapy: Recent advances and promises for the future // Cancer treatment reviews. 2015. V. 41. №9. P. 742-753. <https://doi.org/10.1016/j.ctrv.2015.05.009>
5. Fletcher C. A. J., Fletcher C. A. J. Fluid dynamics: The governing equations // Computational techniques for fluid dynamics 2: specific techniques for different flow categories. 1991. P. 1-46. https://doi.org/10.1007/978-3-642-58239-4_1
6. Jones B. L., Heins P. H., Kerrigan E. C., Morrison J. F., Sharma A. S. Modelling for robust feedback control of fluid flows // Journal of Fluid Mechanics. 2015. V. 769. P. 687-722. <https://doi.org/10.1017/jfm.2015.84>
7. Lions J. L. Optimal control of systems governed by partial differential equations. Berlin: Springer, 1971. V. 170. P. 236-237.
8. Отолбаев М. Математические методы в теории управления. Бишкек: Издательство Кыргызского государственного университета, 2005.

9. Van der Zee J. Heating the patient: a promising approach? // *Annals of oncology*. 2002. V. 13. №8. P. 1173-1184. <https://doi.org/10.1093/annonc/mdf280>
10. Hahn G. M. *Hyperthermia and cancer*. Springer Science & Business Media, 2012.

References:

1. Kartashev, A. P., & Rozhdestvenskii, B. L. (1985). *Uravneniya matematicheskoi fiziki*. Moscow. (in Russian).
2. Polyanin, A. D. (2001). *Spravochnik po lineinym uravneniyam matematicheskoi fiziki*. Moscow. (in Russian).
3. Habash, R. W., Bansal, R., Krewski, D., & Alhafid, H. T. (2006). Thermal therapy, part 2: hyperthermia techniques. *Critical Reviews™ in Biomedical Engineering*, 34(6). <https://doi.org/10.1615/CritRevBiomedEng.v34.i6.30>
4. Datta, N. R., Ordóñez, S. G., Gaip, U. S., Paulides, M. M., Crezee, H., Gellermann, J., ... & Bodis, S. (2015). Local hyperthermia combined with radiotherapy and/or chemotherapy: Recent advances and promises for the future. *Cancer treatment reviews*, 41(9), 742-753. <https://doi.org/10.1016/j.ctrv.2015.05.009>
5. Fletcher, C. A., & Fletcher, C. A. (1991). Fluid dynamics: The governing equations. *Computational techniques for fluid dynamics 2: specific techniques for different flow categories*, 1-46. https://doi.org/10.1007/978-3-642-58239-4_1
6. Jones, B. L., Heins, P. H., Kerrigan, E. C., Morrison, J. F., & Sharma, A. S. (2015). Modelling for robust feedback control of fluid flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 769, 687-722. <https://doi.org/10.1017/jfm.2015.84>
7. Lions, J. L. (1971). *Optimal control of systems governed by partial differential equations* (Vol. 170, pp. 236-237). Berlin: Springer.
8. Otolbaev, M. (2005). *Matematicheskie metody v teorii upravleniya*. Bishkek. . (in Russian).
9. Van der Zee, J. (2002). Heating the patient: a promising approach?. *Annals of oncology*, 13(8), 1173-1184. <https://doi.org/10.1093/annonc/mdf280>
10. Hahn, G. M. (2012). *Hyperthermia and cancer*. Springer Science & Business Media.

Работа поступила
в редакцию 25.03.2025 г.

Принята к публикации
30.03.2025 г.

Ссылка для цитирования:

Кожобекова П. Ж. Учет неоднородности биологических тканей в задачах управления точечным источником тепла // Бюллетень науки и практики. 2025. Т. 11. №6. С. 30-35. <https://doi.org/10.33619/2414-2948/115/04>

Cite as (APA):

Kozhobekova, P. (2025). Accounting for the Heterogeneity of Biological Tissues in the Problems of Controlling a Point Source of Heat. *Bulletin of Science and Practice*, 11(6), 30-35. (in Russian). <https://doi.org/10.33619/2414-2948/115/04>