

УДК 512.6:519.61

<https://doi.org/10.33619/2414-2948/114/02>

НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕТКИ О КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМАХ И ЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ ОБМЕНА

©**Якубова У. Ш.**, ORCID: 0000-0001-5831-7068, *Ташкентский государственный экономический университет, г. Ташкент, Узбекистан, umidayakubova@rambler.ru*
©**Мирходжаева Н. Ш.**, ORCID: 0000-0001-5370-9871, *Ташкентский государственный экономический университет, г. Ташкент, Узбекистан, najibaxon_7@mail.ru*

SOME NOTES ON QUADRATIC FORMS AND THE LINEAR EXCHANGE MODEL

©**Yakubova U.**, ORCID: 0000-0001-5831-7068, *Tashkent State Economic University, Tashkent, Uzbekistan, umidayakubova@rambler.ru*
©**Mirkhodjaeva N.**, ORCID: 0000-0001-5370-9871, *Tashkent State Economic University, Tashkent, Uzbekistan, najibaxon_7@mail.ru*

Аннотация. Рассматривается понятие квадратичной формы, приведение квадратичной формы к каноническому виду, нахождение собственных значений и собственных векторов квадратичной формы, понятия положительной определённости квадратичной формы, понятие отрицательной определённости квадратичной формы. Приведён закон инерции для квадратичных форм. Кроме этого рассмотрена линейная модель обмена при помощи структурной матрицы торговли.

Abstract. Discusses the concept of quadratic form, reducing the quadratic form to its canonical form, finding eigenvalues and eigenvectors of quadratic form, the concept of positive definiteness of quadratic form, and the concept of negative definiteness of quadratic form. The law of inertia for quadratic forms is given. In addition, a linear model of exchange using a structural matrix of trade is considered.

Ключевые слова: квадратичная форма, собственное значение, собственный вектор, закон инерции, линейная модель обмена, структурная матрица торговли.

Keywords: quadratic form, eigenvalue, eigenvector, law of inertia, linear exchange model, structural matrix of trade.

В настоящее время умение применять теоретические знания при решении практических задач становится решающим фактором для изучения любой дисциплины. В частности, исходя из многолетнего опыта преподавания бизнес математики в экономическом вузе, авторам представляется необходимым продемонстрировать решение некоторых экономических задач при помощи математического аппарата [1, 2].

Если мы не сможем улучшить математическое образование, учитывая потребности современного мира и студентов, мы находимся в опасности превращения математики во все более «мертвый язык» и отчуждения групп студентов, математический потенциал которых останется неразвитым [3, 4].

Во многих случаях инвестиционных проектов производства вклады возвращаются одинаковым потоком платежей или другим видом выплат. Его называют «аннуитетом». [5].

Квадратичные формы являются специальными матричными функциями, используемыми для нахождения максимумов и минимумов функций многих переменных.

При оценке параметров многих эконометрических моделей минимизация определенных квадратичных форм дает возможность получения вида решения.

Определение. Квадратичной формой n переменных называется функция f , определенная

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j$$

равенством

Здесь a_{ij} называются коэффициентами квадратичной формы. Они являются действительными числами, удовлетворяющими условиям $a_{ij} = a_{ji}$. Составленная из этих коэффициентов матрица $A = (a_{ij})$ ($i, j = 1, 2, K, n$) называется матрицей квадратичной формы, согласно условию $a_{ij} = a_{ji}$ такие матрицы можно выразить в виде симметричных матриц:

$$f(X) = X'AX \quad (1)$$

здесь $X = (x_1, x_2, K, x_n)$ — состоит из матрицы-столбца. Пусть $C = (c_{ij})$ ($i, j = 1, 2, K, n$) n – невырожденная матрица n -го порядка, $X = (x_1, x_2, K, x_n)$ и $Y = (y_1, y_2, K, y_n)$ связаны равенством $X = CY$.

Тогда из равенства (1) получим $f = X'AX = (CY)'A(CY) = (Y'C')A(CY) = Y'(C'AC)Y = Y'A^*Y$

Значит, при невырожденном линейном преобразовании $X = CY$ соответствующая квадратичной форме f матрица будет следующей: $A^* = C'AC$.

Если $a_{ij} = 0$ для всех $i \neq j$, т.е. матрица квадратичной формы $f = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{nn}x_n^2 = \sum_{i=1}^n a_{ii}x_i^2$ имеет диагональный вид, то $f = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}x_i x_j$ называется каноническим видом квадратичной формы.

Пример. Приведем квадратичную форму $F(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 - 6x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$ к каноническому виду.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Соответствующая квадратичной форме матрица имеет вид:

Найдем собственные значения и собственные векторы этой матрицы.

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 1 \\ -3 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 36 = 0 \quad \lambda_1 = -2, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 6.$$

Найдем собственные векторы.

$$\text{а) для } \lambda_1 = -2 \quad \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ или } \begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ -3x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + 7x_3 = 0 \end{cases}, \text{ или } \begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + 7x_3 = 0 \end{cases}$$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Одно из нетривиальных решений этой системы

$$e_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

б) для $\lambda_2 = 3$ из соображений пункта а), получим

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

с) для $\lambda_3=6$ тоже из соображений пункта а), получим

Учитывая выполнение условия $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ для нормальных векторов, умножив

вектор $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ на $\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, получим нормальный вектор $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Точно также,

$$e_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, e_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

получим остальные векторы:

Так как собственные векторы e_1, e_2, e_3 попарно ортогональны, т.е.

$$C = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \end{pmatrix}$$

$e_1^T \cdot e_2 = e_1^T \cdot e_3 = e_2^T \cdot e_3 = 0$, матрица C имеет следующий вид:

После ортогональной замены переменных $X = CY$, заданная квадратичная форма придет к следующему виду: $F(y_1, y_2, y_3) = 3y_1^2 + 6y_2^2 - 2y_3^2$,

$$\text{здесь } y_1 = -\frac{x_1}{\sqrt{3}} + \frac{x_2}{\sqrt{3}} + \frac{x_3}{\sqrt{3}}, y_2 = \frac{x_1}{\sqrt{6}} - \frac{x_2}{\sqrt{6}} + \frac{2x_3}{\sqrt{6}}, y_3 = \frac{x_1}{\sqrt{2}} + \frac{x_2}{\sqrt{2}}$$

$$\text{и наоборот, } x_1 = -\frac{y_1}{\sqrt{3}} + \frac{y_2}{\sqrt{6}} + \frac{y_3}{\sqrt{2}}, x_2 = \frac{y_1}{\sqrt{3}} - \frac{y_2}{\sqrt{6}} + \frac{y_3}{\sqrt{2}}, x_3 = \frac{y_1}{\sqrt{3}} + \frac{2y_2}{\sqrt{6}}.$$

Определение. Если для всех $x \neq 0$ $q(x) = x^T A x > 0$, то квадратичная форма $q(x)$ и матрица A называются положительно определенными.

Если для всех $x \neq 0$ $q(x) = x^T A x \geq 0$, то квадратичная форма $q(x)$ и матрица A называются полуположительно определенными.

Если для всех $x \neq 0$ $q(x) = x^T A x < 0$, то квадратичная форма $q(x)$ и матрица A называются отрицательно определенными.

Если для всех $x \neq 0$ $q(x) = x^T A x \leq 0$, то квадратичная форма $q(x)$ и матрица A называются полуотрицательно определенными.

Если для некоторых x квадратичная форма положительно определена, а для других x отрицательно определена, то матрица A называется неопределенной (несобственной).

Теорема. Для положительной определенности собственных значений матрицы A необходима и достаточна положительная определенность действительной симметричной матрицы A.

Для полуположительной определенности действительной симметричной матрицы A необходимо и достаточно равенство нулю или положительность собственных значений матрицы.

Для отрицательной определенности собственных значений матрицы необходима и достаточна отрицательная определенность действительной симметричной матрицы.

Для полуотрицательной определенности действительной симметричной матрицы A необходимо и достаточно равенство нулю или отрицательность собственных значений матрицы.

Теорема. Произвольную квадратичную форму можно при помощи несобственного линейного преобразования привести к каноническому виду.

Канонический вид квадратичной формы не единственен в смысле коэффициентов. Однако имеет место следующая теорема.

Теорема. (закон инерции для квадратичных форм). Число положительных и отрицательных членов всех канонических представлений квадратичной формы одинаково.

Теорема. Для положительной определенности квадратичной формы $f = X'AX$ необходима и достаточна положительность главных миноров матрицы A , т.е.

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ii} \end{vmatrix} > 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

A для отрицательной определенности квадратичной форма необходимо и достаточно выполнение условия $(-1)^i \Delta_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$.

Теорема. Для положительной определенности матрицы A необходима и достаточна положительная определенность главных миноров матрицы A .

Главные миноры матрицы A состоят из следующих детерминантов матрицы:

$$A_1 = a_{11}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \dots$$

Пример. Проверьте положительную или отрицательную определенность матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Поскольку собственные значения заданной матрицы $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$ и $\lambda_3 = 3$, согласно теореме выше квадратичная форма положительно определена.

$$q(x) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2.$$

Можно записать следующее:

Для произвольных значений x_1, x_2, x_3 $q(x)$ положительна. Основные миноры тоже положительно определены. В итоге заданная матрица тоже положительно определена.

Пример. Проверьте положительную или отрицательную определенность матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Собственное значение матрицы $\lambda = -1$ двукратно. Согласно теореме выше квадратичная форма отрицательно определена, и записывается следующим образом:

$$q(x) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -x_1^2 - x_2^2.$$

Знак перед переменным вектором x отрицателен.

Линейная модель обмена. Пусть $S_1, S_2, \dots, S_n$ — n государств, их соответствующий национальный доход равен $x_1, x_2, \dots, x_n$. Пусть a_{ij} — доля национального дохода государства S_j , потраченного на покупку товаров у государства S_i . Будем считать, что весь национальный доход тратится на приобретение товаров внутри и за пределами страны, т.е.

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} = 1, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

должно иметь место равенство

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

Рассмотрим следующую матрицу

Она называется структурной матрицей торговли. Доход произвольной страны S_i ($i = \overline{1, n}$) от внутренней и внешней торговли определяется равенством $P_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n$. Для равновесия торговли страны необходима ее неубыточность, т.е. доход от торговли каждой страны должен быть не меньше ее национального дохода. Т.е. $P_i \geq x_i, \quad i = \overline{1, n}$

Предположим $P_i > x_i$, тогда получим следующее: $P_i = \sum_{k=1}^n a_{ik}x_k > x_i, \quad i = \overline{1, n}$

отсюда следует $\sum_{i=1}^n P_i > \sum_{i=1}^n x_i$, т.е. $\sum_{i=1}^n P_i = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik}x_k = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{ik} \right) x_k = \sum_{k=1}^n x_k > \sum_{k=1}^n x_k$, а это

противоречие. Значит, вместо неравенства $P_i \geq x_i$ имеет место равенство $P_i = x_i$. С экономической точки зрения это понятно, поскольку все государства не могут получать прибыль одновременно.

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Если ввести вектор национального дохода государств, то из равенств $P_i = x_i$,

т.е. $\sum_{k=1}^n a_{ik}x_k = x_i, \quad i = \overline{1, n}$ получим следующее уравнение: $AX = X$, т.е. рассматриваемая задача сводится к задаче нахождения соответствующего собственному значению $\lambda = 1$ матрицы A собственного вектора.

Пример. Если структурная матрица торговли четырех государств

$$A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,2 & 0,2 \\ 0,4 & 0,3 & 0,1 & 0,2 \\ 0,3 & 0,3 & 0,5 & 0,2 \\ 0,1 & 0,1 & 0,2 & 0,4 \end{pmatrix}$$

сумма бюджетов $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6270$ (условных денежных единиц), найти бюджет каждого государства.

Сначала нужно найти соответствующий собственному значению $\lambda = 1$ заданной структурной матрицы собственный вектор, т.е. решить уравнение $(A - E)\bar{x} = 0$.

$$\begin{pmatrix} -0,8 & 0,3 & 0,2 & 0,2 \\ 0,4 & -0,7 & 0,1 & 0,2 \\ 0,3 & 0,3 & -0,5 & 0,2 \\ 0,1 & 0,1 & 0,2 & -0,6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку ранг этой системы равен трем, одно из неизвестных – произвольная переменная и остальные выражаются через эту произвольную переменную. Решив систему методом Гаусса, найдем компоненты собственного вектора x

$$x_1 = \frac{140}{121}c, \quad x_2 = \frac{146}{121}c, \quad x_3 = \frac{20}{11}c, \quad x_4 = c.$$

Подставив найденное значение в заданную сумму бюджетов, найдем величину c : $c=1210$, откуда найдем искомую величину бюджетов стран при бездефицитной торговле. $x_1 = 1400$, $x_2 = 1460$, $x_3 = 2200$, $x_4 = 1210$.

Пример. Рассмотрим торговлю трех стран с бюджетом X_1 , X_2 , X_3 . Будем считать, что весь государственный бюджет тратится на покупку товара внутри страны или импорт из других стран. Скажем, пусть первая страна половину своего бюджета тратит на обмен товарами внутри страны, $1/4$ часть — на покупку сырья у второго государства и оставшуюся $1/4$ часть – на покупку сырья у третьего государства. Второе государство распределяет свой бюджет поровну на внутренний товар, на покупку сырья у первого и третьего государств. Третье государство на $1/2$ бюджета покупает товар у первого государства, на остальную $1/2$ часть — у второго государства, не обменивается товаром внутри страны. Найдем собственный вектор X этой модели международной торговли. Запишем структурную матрицу этой международной торговли.

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} I & II & III \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Здесь a_{ij} – доля государственного бюджета государства j на покупку продукции i – государства. Сумма элементов каждого столбца этой матрицы равна единице.

i — государство после годовой торговли обладает следующим доходом:
 $P_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3$

$$P_1 = \frac{1}{2} X_1 + \frac{1}{3} X_2 + \frac{1}{2} X_3$$

Например, для первого государства доход будет следующим:

Для сбалансированной торговли необходимо потребовать бездефицитность торговли для каждого государства, т.е. для всех $i = 1, 2, 3$ надо, чтобы $P_i = X_i$.

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

В матричном виде это равенство выражается как $AX = X$, здесь

Значит, для рассматриваемого случая система уравнений, определяющих X , имеет вид

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} x_1 = 2x_3 \\ x_2 = \frac{3}{2}x_3 \end{cases}$$

Общее решение этой системы имеет вид

Поэтому за собственный вектор можно взять вектор $\bar{x} = x^T = (4; 3; 2)$.

В частности, это означает, что для сбалансированности торговли участвующих государств, их государственные бюджеты должны быть связаны соотношением типа $x_1: x_2: x_3 = 4: 3: 2$.

Список литературы:

1. Якубова У. Ш., Парпиева Н. Т., Мирходжаева Н. Ш. Некоторые применения теории матриц в экономике // Бюллетень науки и практики. 2021. Т. 7. №2. С. 245-253. <https://doi.org/10.33619/2414-2948/63/24>
2. Parpieva N., Yakubova U., Mirkhodjaeva N. The Relevance of Integration of Modern Digital Technologies in Teaching Mathematics // Бюллетень науки и практики. 2020. Т. 6. №4. С. 438-443. <https://doi.org/10.33619/2414-2948/53/51>
3. Якубова У. Ш., Мирходжаева Н. Ш., Парпиева Н. Т. Некоторые применения теории двойственности при решении задач линейного программирования // Бюллетень науки и практики. 2022. Т. 8. №5. С. 621-628. <https://doi.org/10.33619/2414-2948/78/75>
4. Якубова У. Ш., Парпиева Н. Т., Мирходжаева Н. Ш. Некоторые применения графического и симплексного методов решения задач линейного программирования // Бюллетень науки и практики. 2022. Т. 8. №4. С. 490-498. <https://doi.org/10.33619/2414-2948/77/57>
5. Малыхин В. И. Финансовая математика. М., Юнити-дана, 2003.
6. Якубова У. Ш., Парпиева Н. Т., Мирходжаева Н. Ш. Некоторые применения финансовой математики при решении экономических задач // Бюллетень науки и практики. 2023. Т. 9. №2. С. 312-320. <https://doi.org/10.33619/2414-2948/87/36>
7. Якубова У. Ш., Парпиева Н. Т., Мирходжаева Н. Ш. Некоторые заметки о потоках платежей // Бюллетень науки и практики. 2023. Т. 9. №2. С. 321-328. <https://doi.org/10.33619/2414-2948/87/37>

References:

1. Yakubova, U., Parpieva, N., & Mirhojaeva, N. (2021). Some Applications of Matrix Theory in Economics. *Bulletin of Science and Practice*, 7(2), 245-253. (in Russian). <https://doi.org/10.33619/2414-2948/63/24>
2. Parpieva, N., Yakubova, U., & Mirkhodjaeva, N. (2020). The Relevance of Integration of Modern Digital Technologies in Teaching Mathematics. *Bulletin of Science and Practice*, 6(4), 438-443. <https://doi.org/10.33619/2414-2948/53/51>
3. Yakubova, U., Mirkhodjaeva, N., & Parpieva, N. (2022). Some Applications of Duality Theory in Solving Linear Programming Problems. *Bulletin of Science and Practice*, 8(5), 621-628. (in Russian). <https://doi.org/10.33619/2414-2948/78/75>
4. Yakubova, U., Parpieva, N., & Mirkhodjaeva, N. (2022). Some Applications of Graphical and Simplex Methods for Solving Linear Programming Problems. *Bulletin of Science and Practice*, 8(4), 490-498. (in Russian). <https://doi.org/10.33619/2414-2948/77/57>
5. Malykhin, V. I. (2003). *Finansovaya matematika*. Moscow. (in Russian).
6. Yakubova, U., Parpieva, N., & Mirkhodjaeva, N. (2023). Some Applications of Financial Mathematics in Solving Economic Problems. *Bulletin of Science and Practice*, 9(2), 312-320. (in Russian). <https://doi.org/10.33619/2414-2948/87/36>
7. Yakubova, U., Parpieva, N., & Mirkhodjaeva, N. (2023). Some Notes on Payments Streams. *Bulletin of Science and Practice*, 9(2), 321-328. (in Russian). <https://doi.org/10.33619/2414-2948/87/37>

*Работа поступила
в редакцию 09.03.2025 г.*

*Принята к публикации
17.03.2025 г.*

Ссылка для цитирования:

Якубова У. Ш., Мирходжаева Н. Ш. Некоторые заметки о квадратичных формах и линейной модели обмена // Бюллетень науки и практики. 2025. Т. 11. №5. С. 23-30. <https://doi.org/10.33619/2414-2948/114/02>

Cite as (APA):

Yakubova, U., & Mirkhodjaeva, N. (2025). Some Notes on Quadratic Forms and the Linear Exchange Model. *Bulletin of Science and Practice*, 11(5), 23-30. (in Russian). <https://doi.org/10.33619/2414-2948/114/02>