УДК 512.6:519.61 https://doi.org/10.33619/2414-2948/114/01

НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕТКИ О РЕШЕНИИ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

©**Якубова У. Ш.,** *ORCID: 0000-0001-5831-7068, Ташкентский государственный экономический университет, г. Ташкент, Узбекистан, umidayakubova@rambler.ru*
©**Мирходжаева Н. Ш.,** *ORCID: 0000-0001-5370-9871, Ташкентский государственный экономический университет, г. Ташкент, Узбекистан, najibaxon7@mail.ru*

SOME NOTES ON THE SOLUTION OF SYSTEMS OF LINEAR EQUATIONS

©**Yakubova U.**, *ORCID: 0000-0001-5831-7068, Tashkent State Economic University, Tashkent, Uzbekistan, umidayakubova@rambler.ru*
©**Mirkhodjaeva N.**, *ORCID: 0000-0001-5370-9871, Tashkent State Economic University, Tashkent, Uzbekistan, najibaxon_7@mail.ru*

Аннотация. Рассматривается понятие системы линейных уравнений, решение систем линейных уравнений при помощи метода обратных матриц, решение систем линейных уравнений по правилу Крамера. Рассмотрен метод Гаусса решения систем линейных уравнений. Приводится теорема Кронекера-Капелли и рассматривается решение систем линейных однородных уравнений.

Abstract. The paper discusses the concept of a system of linear equations, the solution of systems of linear equations using the inverse matrix method, the solution of systems of linear equations according to Cramer's rule, and also considered the Gaussian method of solving systems of linear equations. In addition, the Kronecker-Capelli theorem is given and the solution of systems of linear homogeneous equations is considered.

Ключевые слова: система линейных уравнений, метод обратных матриц, метод Крамера, метод Гаусса, однородные уравнения.

Keywords: system of linear equations, inverse matrix method, Cramer's method, Gauss's method, homogeneous equations.

В настоящее время умение применять теоретические знания при решении практических задач становится решающим фактором для изучения любой дисциплины. В частности, исходя из многолетнего опыта преподавания бизнес математики в экономическом вузе, авторам представляется необходимым продемонстрировать решение некоторых экономических задач при помощи математического аппарата [1, 2].

Если мы не сможем улучшить математическое образование, учитывая потребности современного мира и студентов, мы находимся в опасности превращения математики во все более «мертвый язык» и отчуждения групп студентов, математический потенциал которых останется неразвитым [3, 4].

Во многих случаях инвестиционных проектов производства вклады возвращаются одинаковым потоком платежей или другим видом выплат. Его называют «аннуитетом». [5].

Одна из причин введения понятия «деления» матриц заключается в возможности применения метода матриц для решения систем линейных уравнений.

Например, рассмотрим систему уравнений с четырьмя неизвестными:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 8x_2 + x_3 + 2x_4 &= 96 \\ 20x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 0.5x_4 &= 69 \\ 11x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 5x_4 &= 75 \\ x_1 + 12x_2 + x_3 + 8x_4 &= 134 \end{aligned}$$

Эти уравнения можно выразить в матричной форме следующим образом:

- постоянные коэффициенты четырех неизвестных x_1, x_2, x_3 и x_4 определяют матрицу A размера 4×4;

- сами четыре неизвестные задают вектор x размера 4 × 1;

- постоянные в правой части уравнений задают вектор $\boldsymbol{b}$ размера 4 × 1.

Систему можно записать следующим образом:

$$Ax = \begin{bmatrix} 3 & 8 & 1 & 2 \\ 20 & -2 & 4 & 0.5 \\ 11 & 3 & 3 & -5 \\ 1 & 12 & 1 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 96 \\ 69 \\ 75 \\ 134 \end{bmatrix} = b$$

Правильность этой записи можно легко проверить, воспользовавшись правилом умножения матриц Ax. Элементы строк матрицы A умножаются на соответствующие элементы вектора x и складываются. Если посчитать все элементы произведения Ax и приравнять их к соответствующим элементам матрицы b, получим совместную систему линейных уравнений. Например, перемножение элементов первой строки матрицы A на соответствующие элементы вектора x дает первый элемент произведения Ax

$$3x_1 + 8x_2 + x_3 + 2x_4.$$

Приравнивая его к первому элементу 96 вектора $\boldsymbol{b}$, получим первое уравнение.

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

Эту систему уравнений можно решить каким-нибудь стандартным способом, но матричный метод обладает преимуществами, с которыми ознакомимся в следующих разделах. Метод матриц применим и в общем случае. Пусть задана система n линейных уравнений с n неизвестными b_1, b_2, b_3… b_n — свободные члены.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\quad \vdots \quad &\;\; \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

Эту систему n линейных уравнений с n неизвестными можно записать в матричном виде $Ax = b$, здесь A – матрица коэффициентов размера $n \times n$

$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$, $x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ - матрица неизвестных, $b=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ - матрица свободных членов.

Как можно решить эту совместную систему уравнений $Ax=b$ для неизвестных x? Если бы в уравнении $Ax = b$ A и b были не матрицами, а числами, из этого соотношения неизвестную x легко найти в виде $x = A^{-1} \cdot b$. Попытаемся найти решение в этом виде и в случае, когда x, A и b матрицы. Системой m линейных уравнений с n неизвестными называется следующая система:

$$\begin{cases} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \cdots + a_{1j}\,x_j + \cdots + a_{in}\,x_n = b_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}x \ + \cdots + a_{2j}\ \ x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \\ a_{i1}\,x_1 + a_{i2}\,x_2 + \cdots + a_{ij}\,x_j + \cdots + a_{in}\,x_n = b_i \\ - \quad - \quad - \quad - \quad - \\ a_{m1}x_1 \quad a_{m2}\ \ x_2 + \cdots + a_{mj}\ x_i + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}, \tag{1}$$

здесь $a_{ij}, b_i\,(i=\overline{1,m};\, j=\overline{1,n})$ – заданные числа, a_u – коэффициенты перед неизвестными, b_i – свободные члены.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ - \ - & - \ - \\ a_{m1} & a_{m2} \dots a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

здесь A называется матрицей коэффициентов (1) или матрицей системы, B – матрицей свободных членов. Тогда заданную систему уравнений можно записать в виде: $AX = B$.

Определение. Если система уравнений имеет решение, она называется совместной, иначе несовместной.

Определение. Если совместная система уравнений имеет единственное (бесконечно много) решение, она называется определенной (неопределенной). Пусть кроме системы уравнений задана следующая система уравнений.

Определение. Если множества решений систем уравнений совпадают, они называются равносильными (эквивалентными).

Решение системы уравнений методом матриц

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ - \ - & - \ - \\ a_{m1} & a_{m2} \dots a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

З десь A называется матрицей коэффициентов матрицы, B – матрицей свободных членов. Тогда заданную систему уравнений можно записать в виде $AX = B$.

Пусть в системе уравнений число уравнений равно числу неизвестных, т.е. $m = n$. В этом случае матрица системы A будет квадратной. Если $\Delta \neq 0$, т.е. A – невырожденная матрица, существует обратная матрица A^{-1}, то из равенства $AX = B$ находим следующее: $A^{-1}(AX) = A^{-1}B \Rightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1}B \Rightarrow EX = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B$, из этого соотношения:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \cdots A_{nn} \\ A_{12} & A_{22} \cdots A_{n2} \\ ------ \\ A_{1j} & A_{2j} \cdots A_{n2} \\ A_{1n} & A_{2n} \cdots A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Из последнего равенства вытекает $x_j = \frac{1}{\Delta}(b_1 A_{1j} + b_2 A_{2j} + \cdots + b_n A_{nj}) = \frac{\Delta j}{\Delta}, \ \Delta_j = \overline{1,n}$

Например. Решим систему уравнений $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 1 \end{cases}$ методом матриц. Соответствующие системе основная матрица, матрицы свободных членов и неизвестных будут следующими: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$

Так как $|A| = 24 + 27 + 16 - 24 - 24 - 1 = 1 \neq 0$ $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

Тогда $X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Значит, $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$.

Решение системы уравнений по правилу Крамера. Метод Крамера является одним из методов решения систем уравнений, при котором решения легко находятся через детерминанты. Этот метод более эффективен при нахождении одной определенной переменной. Несмотря на то, что в программе Excel можно находить обратную матрицу и перемножать, неважно, сколько времени уходит на вычисления вручную. Поэтому для изучения экономических процессов удобным считается метод Крамера. Для более сложной экономической математики ниже приводится правило Крамера в виде алгебраической формулы. Известна матричная запись системы линейных уравнений с n неизвестными x_1, x_2, K, x_n $Ax = b$, здесь A – матрица параметров размера $n \times n$, x – вектор неизвестных размера $n \times 1$ и b – вектор свободных членов размера $n \times 1$.

Метод Крамера означает для нахождения любой неизвестной x_i подстановку в i-й столбец матрицы A элементов матрицы b, деление детерминанта полученной матрицы на детерминант матрицы A. Значит, $x_i = \frac{|A_i|}{|A|}$

Пример. Найдите неизвестные x_1 и x_2 при помощи правила Крамера

$$5x_i + 0.4x_2 = 12$$
$$3x_1 + 3x_2 = 21$$

Решение. Матричный вид этой системы $Ax = \begin{bmatrix} 5 & 0.4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 21 \end{bmatrix} = b$

Найдем неизвестную x_1, применив правило Крамера $x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 12 & 0.4 \\ 21 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 0.4 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{36-8.4}{15-1.2} = \frac{27.6}{13.8} = 2$

Точно также находится неизвестная x_2. $x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 1.2 \\ 3 & 21 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 0.4 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{105-36}{15-1.2} = \frac{69}{13.8} = 5$

Теорема Крамера. Если детерминант системы $\Delta \neq 0$, тогда система (1) имеет единственное решение, которое находится по формулам $x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \quad j = \overline{1,n}$

Формулы $x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \quad j = \overline{1,n}$ называются формулами Крамера, а решение системы уравнений по этим формулам называется методом Крамера или детерминантов.

Пример. Решите систему уравнений методом Крамера $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 = -1. \end{cases}$

Решение. $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix} = -16$. Так как основной детерминант Δ = -16 ≠ 0, система имеет единственное решение и его найдем по формулам Крамера

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 6 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & 2 \end{vmatrix} = -32$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 16$, $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 6 \\ 1 & 5 & -1 \end{vmatrix} = -16$. $x_1 = 2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$.

Решение системы линейных уравнений методом Гаусса. Приведенные выше способы можно применять только при равенстве числа уравнений числу переменных. Метод, применяемый в общем случае, – метод Гаусса. Метод Гаусса еще называется методом последовательного исключения неизвестных. Элементарными преобразованиями над системой линейных уравнений называются следующие: умножение какого-либо уравнения системы на отличное от нуля число, перемена мест уравнений, умножение какого-либо уравнения на число и складывание с другим уравнением.

Образованная в результате этих преобразований система эквивалентна начальной, т.е. множество решений для обеих систем одинаково.

$$\begin{cases} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \cdots + a_{1j}\,x_j + \cdots + a_{in}\,x_n = b_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}x\ + \cdots + a_{2j}\ x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \\ a_{i1}\,x_1 + a_{i2}\,x_2 + \cdots + a_{ij}\,x_j + \cdots + a_{in}\,x_n = b_i \\ - \quad - \quad - \quad - \quad - \\ a_{m1}x_1 \quad a_{m2}\ x_2 + \cdots + a_{mj}\ x_i + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

образуем расширенную матрицу при помощи матрицы системы и столбца свободных членов

$$\bar{A} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 \cdots x_n & \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13}\cdots a_{1n} & & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\cdots a_{2n} & & b_2 \\ - & - & - - - - & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3}\cdots a_{mn} & & b_m \end{array}\right) \end{array}$$

Теорема Кронекера-Капелли. Если ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы, т.е. если $r(A) = r(\bar{A})$,тогда система совместна, т.е. имеет решение.

Значит, можно сделать следующие выводы.

1. Если $r(A) = r(\bar{A})$, система совместна.

2. Если $r(A) \neq r(\bar{A})$, система несовместна.

3. Если $r(A) = r(\bar{A}) = n$, система имеет единственное решение.

4. Если $r(A) = r(\bar{A}) < n$, система имеет бесконечное множество решений.

Пример. Решите систему методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 20 \\ 5x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 17 \\ -3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 = -4 \end{cases}.$$

Решение. Решим систему методом Гаусса. В расширенной матрице системы удобно для вычислений: $a_{11} = 1$. Поэтому поменяем местами первую и четвертую строки

 Т. 11. №5 2025
https://doi.org/10.33619/2414-2948/114

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 3 & 20 \\ 5 & -1 & 2 & -1 & 17 \\ -3 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 4 & -2 & -4 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 4 & -2 & -4 \\ 5 & -1 & 2 & -1 & 17 \\ -3 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & 20 \end{array}\right) + \quad \boxed{-5} \quad \boxed{3} \quad \boxed{-2}$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 4 & -2 & -4 \\ 0 & 4 & -18 & 9 & 37 \\ 0 & -1 & 11 & -4 & 13 \\ 0 & 3 & -9 & 7 & 28 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 4 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & 11 & -4 & 13 \\ 0 & 4 & -18 & 9 & 37 \\ 0 & 3 & -9 & 7 & 28 \end{array}\right) \quad \boxed{4} \quad \boxed{3}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 4 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & 11 & -4 & -11 \\ 0 & 0 & 26 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 24 & -5 & -5 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 4 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & 11 & -4 & -11 \\ 0 & 0 & 26 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{19}{13} & \frac{19}{13} \end{array}\right).$$

Расширенная матрица приведена к ступенчатому виду. Соответствующая ей система имеет следующий вид:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 = -4 \\ -x_2 - 11x_3 - 4x_4 = -11 \\ 26x_3 - 7x_4 = -7 \\ \frac{19}{13}x_4 = \frac{19}{13} \end{cases}$$

Получим решения из последнего уравнения $x_4 = 1$, из третьего $x_3 = \frac{-7 + 7x_4}{26} = 0$, из второго $x_2 = 11 + 11x_3 - 4x_4 = 7$ и из первого $x_1 = -4 + x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 5$.

Система однородных линейных уравнений. Если в системе линейных уравнений свободные члены равны нулю, т.е. если $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$, полученная система уравнений называется системой однородных уравнений, т.е.

$$\begin{cases} a_{11}\ x_1 + a_{12}\ x_2 + \cdots + a_{1n}\ x_n = 0 \\ a_{21}\ x_1 + a_{22}\ x_2 + \cdots + a_{2n}\ x_n = 0 \\ ---------------- \\ a_{m1}\ x_1 + a_{m2}\ x_2 + \cdots + a_{mn}\ x_n = 0 \end{cases}$$

Поскольку последний столбец расширенной матрицы этой системы равен нулю, ранги матрицы системы и расширенной матрицы будут равны, т.е. $r(A) = r(\overline{A})$. Поэтому, согласно теореме Кронекера-Капелли, система однородных уравнений всегда совместна. Например, тривиальное решение (нулевое решение) системы будет (0,0,..., 0)=0.

Матричный вид системы уравнений следующий: AX = 0.

Согласно приведенным выше выводам 1-4, если *r(A)* = *n* система имеет единственное нулевое решение, если *r(A)* < *n*, имеет бесконечное множество решений. Значит, для того, чтобы система при *m* = *n* имела отличное от нуля решение необходимо и достаточно, чтобы ее детерминант был равен нулю.

Определение. Если задана система линейно независимых решений системы $X_1,\ X_2,\cdots,X_k$, произвольное решение этой системы *X* состоит из линейной комбинации этих решений, т.е. существуют такие числа $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$, что $X = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \cdots + \lambda_k X_k$ тогда эта система называется системой фундаментальных решений.

Теорема. Если для системы *r(A)* < *n*, тогда произвольная система фундаментальных решений состоит из *k* = *n*- *r(A)* решений.

Например. Найдем систему фундаментальных решений системы однородных уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 - 5x_5 = 0 \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

Последнее уравнение системы запишем первым, затем приведем ее к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -16 & 3 \\ 3 & 1 & -8 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -3 & -7 & 2 \\ 1 & 11 & -12 & 34 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -16 & 3 \\ 0 & 16 & -14 & 50 & 8 \\ 0 & 8 & -7 & 25 & -4 \\ 0 & 16 & -14 & 50 & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -16 & 3 \\ 0 & 8 & -7 & 25 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ранг матрицы *r(A)* =2. Базисный минор переменных x_1 и x_2 $\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} \neq 0,$ выберем переменные x_1 и x_2 как главные и выразим их через неглавные неизвестные x_3, x_4, x_5.

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0 \\ \quad 8x_2 - 7x_3 + 25x_4 - 4x_5 = 0 \end{cases}$$

Заменим неглавные переменные x_3, x_4, x_5 строками единичной матрицы *E* , чтобы найти систему общих решений. Если взять x_3 = 1, x_4 = 0, x_5 = 0, система примет следующий вид $\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 2 = 0 \\ \quad 8x_2 - 7 = 0 \end{cases}$ отсюда $x_1 = \dfrac{19}{8}, \ x_2 = \dfrac{7}{8}$, т.е. получим первое базисное решение: $X_1 = \left(\dfrac{19}{8}; \dfrac{7}{8}; \ 1, 0, 0\right)$ точно также найдем еще два базисных решения при $x_3 = 0, x_4 = 1, \ x_5 = 0$ $X_2 = \left(\dfrac{3}{8}; -\dfrac{25}{8}; \ 0, 1, 0\right);$ при $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 1$ $X_3 = \left(-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}; \ 0, 0, 1\right).$

Найденные решения X_1, X_2, X_3 образуют фундаментальную систему решений заданной системы. Для удобства перемножив компоненты решений X_1, X_2, X_3 соответственно на числа 8, 8, 2, образуем систему фундаментальных решений с целыми компонентами: $\overline{X}_1 = (19; \ 7; \ 8; \ 0; \ 0)$, $\overline{X}_2 = (3; \ -25; \ 0; \ 8; \ 0)$, $X_3 = (-1; \ 1; \ 0; \ 0; \ 2)$.

А общее решение имеет вид $X = \lambda_1 (19; \ 7; \ 8; \ 0; \ 0) + \lambda_2 (3; -25; 0; 8; 0) + \lambda_3 (-1; 1; 0; 0; 2)$.

Если ранг основной матрицы системы линейных уравнений с *n* неизвестными на единицу меньше числа неизвестных, т.е. *r (A)* = *n* - *1*, тогда в качестве решения системы линейных уравнений можно взять систему *n – 1* знак чередующихся миноров, полученных вычеркиванием первого, второго и т.д. столбцов матрицы системы уравнений. Если эти миноры отличны от нуля, тогда все решения этой системы линейных уравнений кратны этим числам. Например, найдем все решения системы линейных однородных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Сначала вычислим ранг соответствующей системе матрицы.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Значит, ранг матрицы системы уравнений равен *r(A)* = 2 и он на единицу меньше числа неизвестных. Поэтому число фундаментальных решений системы уравнений равно *k*=3-2=1. Возьмем произвольные два уравнения системы, например, первое и второе

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}.$$

Вычислим знакочередующиеся миноры, полученные вычеркиванием первого, второго и третьего столбцов соответствующей системе уравнений матрицы $x_1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \cdot k = 5k,$ $x_2 = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \cdot k = -4k$, $x_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \cdot k = -3k$,здесь k произвольное число.

Значит, общее решение системы $\{5k; -4k\ ;\ 3k\}$, здесь k произвольное число.

Список литературы:

1. Якубова У. Ш., Парпиева Н. Т., Мирходжаева Н. Ш. Некоторые применения теории матриц в экономике // Бюллетень науки и практики. 2021. Т. 7. №2. С. 245-253. https://doi.org/10.33619/2414-2948/63/24
2. Parpieva N., Yakubova U., Mirkhodjaeva N. The Relevance of Integration of Modern Digital Technologies in Teaching Mathematics // Бюллетень науки и практики. 2020. Т. 6. №4. С. 438-443. https://doi.org/10.33619/2414-2948/53/51
3. Якубова У. Ш., Мирходжаева Н. Ш., Парпиева Н. Т. Некоторые применения теории двойственности при решении задач линейного программирования // Бюллетень науки и практики. 2022. Т. 8. №5. С. 621-628. https://doi.org/10.33619/2414-2948/78/75
4. Якубова У. Ш., Парпиева Н. Т., Мирходжаева Н. Ш. Некоторые применения графического и симплексного методов решения задач линейного программирования // Бюллетень науки и практики. 2022. Т. 8. №4. С. 490-498. https://doi.org/10.33619/2414-2948/77/57
5. Малыхин В. И. Финансовая математика. М., Юнити-дана, 2003.
6. Якубова У. Ш., Парпиева Н. Т., Мирходжаева Н. Ш. Некоторые применения финансовой математики при решении экономических задач // Бюллетень науки и практики. 2023. Т. 9. №2. С. 312-320. https://doi.org/10.33619/2414-2948/87/36

7. Якубова У. Ш., Парпиева Н. Т., Мирходжаева Н. Ш. Некоторые заметки о потоках платежей // Бюллетень науки и практики. 2023. Т. 9. №2. С. 321-328. https://doi.org/10.33619/2414-2948/87/37

References:

1. Yakubova, U., Parpieva, N., & Mirhojaeva, N. (2021). Some Applications of Matrix Theory in Economics. *Bulletin of Science and Practice, 7*(2), 245-253. (in Russian). https://doi.org/10.33619/2414-2948/63/24

2. Parpieva, N., Yakubova, U., & Mirkhodjaeva, N. (2020). The Relevance of Integration of Modern Digital Technologies in Teaching Mathematics. *Bulletin of Science and Practice, 6*(4), 438-443. https://doi.org/10.33619/2414-2948/53/51

3. Yakubova, U., Mirkhodjaeva, N., & Parpieva, N. (2022). Some Applications of Duality Theory in Solving Linear Programming Problems. *Bulletin of Science and Practice, 8*(5), 621-628. (in Russian). https://doi.org/10.33619/2414-2948/78/75

4. Yakubova, U., Parpieva, N., & Mirkhodjaeva, N. (2022). Some Applications of Graphical and Simplex Methods for Solving Linear Programming Problems. *Bulletin of Science and Practice, 8*(4), 490-498. (in Russian). https://doi.org/10.33619/2414-2948/77/57

5. Malykhin, V. I. (2003). Finansovaya matematika. Moscow. (in Russian).

6. Yakubova, U., Parpieva, N., & Mirkhodjaeva, N. (2023). Some Applications of Financial Mathematics in Solving Economic Problems. *Bulletin of Science and Practice, 9*(2), 312-320. (in Russian). https://doi.org/10.33619/2414-2948/87/36

7. Yakubova, U., Parpieva, N., & Mirkhodjaeva, N. (2023). Some Notes on Payments Streams. *Bulletin of Science and Practice, 9*(2), 321-328. (in Russian). https://doi.org/10.33619/2414-2948/87/37

Работа поступила в редакцию 09.03.2025 г.

Принята к публикации 17.03.2025 г.

Ссылка для цитирования:

Якубова У. Ш., Мирходжаева Н. Ш. Некоторые заметки о решении систем линейных уравнений // Бюллетень науки и практики. 2025. Т. 11. №5. С. 13-22. https://doi.org/10.33619/2414-2948/114/01

Cite as (APA):

Yakubova, U., & Mirkhodjaeva, N. (2025). Some Notes on the Solution of Systems of Linear Equations. *Bulletin of Science and Practice, 11*(5), 13-22. (in Russian). https://doi.org/10.33619/2414-2948/114/01

