УДК 512.86 https://doi.org/10.33619/2414-2948/111/04

ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ В ОБОБЩЕННЫХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ m-УНИТРЕУГОЛЬНЫХ ГРУППАХ НАД АССОЦИАТИВНЫМ КОЛЬЦОМ

©Сатаров Ж. С., *д-р.физ.-мат. наук, Ошский технологический университет им. М. М. Адышева, г. Ош, Кыргызстан, satarov1949@mail.ru*
©Исакова В. Т., *канд.пед.наук, Ошский государственный педагогический университет им. А. Ж.Мырсабекова, г. Ош, Кыргызстан, isakova.v73@gmail.com*
©Жолдошова Ч. Б., *Ошский технологический университет им. М. М. Адышева, г. Ош, Кыргызстан, chebire86@mail.ru*

DEFINING RELATIONS IN GENERALIZED ELEMENTARY m-UNIT TRIANGULAR GROUPS OVER AN ASSOCIATIVE RING

©Satarov Zh., *Dr.habil., Osh Technological University named M. M. Adyshev, Osh, Kyrgyzstan, satarov1949@mail.ru*
©Isakova V., *Ph.D., Osh state Pedagogical University named A.Zh. Myrsabecov, Osh, Kyrgyzstan, isakova.v73@gmail.com*
©Zholdoshova Ch., *Osh Technological University named M. M.Adyshev, Osh, Kyrgyzstan, chebire86@mail.ru*

Аннотация. В работе находятся образующие элементы и определяющие соотношения обобщенной элементарной m-унитреугольной группы $UTE_m^o(\aleph, R)$ $UTE_m^o(\aleph, R)$ степени $\aleph \geq 2$ над произвольным ассоциативным кольцом $R \neq \{0\}$. При решении этой задачи применяется метод трансформации букв, развитый одним из авторов в более ранних его работах. Изучаемая в работе группа оказалась тесно связанной с еще одним вопросом алгебры – с радикальными кольцами. Используя отдельные из промежуточных результатов работы, здесь найдены также некоторые новые примеры (как простых, так и непростых) матричных радикальных колец.

Abstract. In this paper, we find the forming elements and defining relations of a generalized elementary m-triangular group $UTE_m^o(\aleph, R)$ of degree $\aleph \geq 2$ over an arbitrary associative ring $R \neq \{0\}$. In solving this problem, the method of letter transformation is used, developed by one of the authors in his earlier works. The group studied in this paper turned out to be closely related to another issue of algebra with radical rings. Using some of the intermediate results of the work, some new examples (both simple and complex) of matrix radical rings are also found here.

Ключевые слова: m-унитреугольная группа, порождающие элементы, определяющие соотнощения, радикальное кольцо, ассоциативное кольцо, квазигруппа кольца, присоединенное умножение, квазиобратимый элемент.

Keywords: m-unitriangular group, generating elements, defining correlations, radical ring, associative ring, quasi-group of a ring, adjoint multiplication, quasi-reversible element.

Описание линейных групп через образующие и определяющие соотношения составляет один из основных способов их изучения. В названном направлении на сегодня накопилось уже солидное количество исследований, отметим, например, работы [1-7].

Т. 11. №2 2025
https://doi.org/10.33619/2414-2948/111

Настоящая работа также выполнена в рамках названной тематики, а точнее в ней мы находим образующие и соотношения обобщенной элементарной m-унитреугольной группы $UTE_m^o(\aleph, R)$ вообще говоря бесконечного порядка $\aleph \geq 2$ над произвольным ассоциативным кольцом $R \neq \{0\}$. Выбор названного объекта исследования помимо естественного интереса к нему, является примечательным и тем, что при рассмотрении он приводит нас к новым примерам матричных радикальных колец. Вопреки нашим ожиданиям, возникают они там в несметно большом количестве.

По своему содержанию и выполнению эта работа является близкой к [7], где были выявлены образующие и соотношения (верхней) элементарной треугольной группы $TE(\aleph, K)$ степени $\aleph \geq 2$ над произвольным ассоциативным кольцом K с $1 \neq 0$. При решении нашей задачи мы и здесь используем метод трансформации, развитый еще в [7-9] и других работах авторов. С описанием метода можно ознакомиться также в [10].

1. Введение группы $UTE_m^o(\aleph, R)$

Переходим теперь к точным определениям. Всюду в работе R считается произвольным ненулевым ассоциативным кольцом. Для нашей цели необходимо также множество индексов I произвольной мощности $\aleph = cardI \geq 2$, наделенное линейным порядком < (по теореме Цермело всякое множество можно даже вполне упорядочить). От этого множества I мы потребуем также, чтобы в нем было введено (вообще говоря неполное и согласованное c <) сложение +, которое удовлетворяет следующим двум условиям: 1) все пары $i<j$ из I были связаны соотношением $j=i+t$ при некоторых $t \in \mathrm{I}$; 2) для суммируемых i, k из I было $i < i + k$. В качестве такого I можно взять, например, множество всех натуральных чисел N вместе с обычным его порядком < и сложением + или же конечные отрезки $\{s + 1, \dots, s + n\}$, $n \geq 2$, из N также с обычным < и правилом сложения $(s + i) + (s + j) = s + (i + j)$. Как видно, в первом примере сложение является полным, а во втором же – нет (ибо при $i = n$ или $j = n$ оно не определено). В связи со вторым примером, здесь мы примем следующее соглашение: номер m из I назовем суммируемым, если для него $t + m \in I$ при некотором $t \in I$. В противном случае он называется несуммируемым элементом. Очевидно, несуммируемые элементы возникают только при конечных I, причем они там будут последними их элементами. Пусть теперь

$$a = (a_{ij}) \qquad (a)$$

–матрица порядка $\aleph$ над кольцом R (другими словами отображение $a: I \times I \to R$). Она называется конечной матрицей, если число ненулевых элементов a_{ij} конечно. Далее (следуя [11, с. 24], для суммируемого номера $m \in I$ матрицу (a) будем называть m-унитреугольной, если для ее элементов выполнено условие

$$j < i + m \to a_{ij} = 0. \qquad (\to)$$

Обозначим через $M_m = UTE_m(\aleph, R)$ множество всех конечных m-унитреугольных матриц порядка $\aleph$ над кольцом R. Вводим теперь для матриц x, y из M_m операцию присоединенного умножения $x \circ y = x + xy + y$ (ее называют также квазиумножением), где сложение и умножение — обычные матричные (т.е. $(x + y)_{ij} = (x_{ij} + y_{ij})$ и $(xy)_{ij} = \sum_{t \in I} x_{it}\, y_{jt}$). Покажем, что для них $x \circ y \in M_m$. Здесь конечность $x \circ y$ следует из конечности x, y очевидным образом. Пусть $< i, j >$— позиция из xy, для которой $j < i + m$. Ее можно представить как $(xy)_{ij} = \sum_{t<i+m} x_{it}\, y_{tj} + \sum_{t \geq i+m} x_{it} y_{tj}$

Здесь в первой сумме имеем $x_{it} = 0$ (как позиции, удовлетворяющие условию ($\rightarrow$)). А во второй же мы будем иметь $y_{tj} = 0$, ибо для ее индексов $i + t \le t \& j < i + m \rightarrow j < t \rightarrow j < t + m$.

Таким образом, наряду с x и y их произведение xy также удовлетворяет требованием ($\rightarrow$). Тогда квазипроизведение $x \circ y$, как сумма трех матриц из M_m, подчиненных условию ($\rightarrow$), также будет удовлетворять этому условию ($\rightarrow$) очевидным образом. Итак, замкнутость множества M_m относительно (матричного) квазиумножения установлена. Далее, матрицу $x \in M_m$ назовем квазиобратимой (называют также квазирегулярной), если для нее выполнены равенства $x \circ y = 0 = y \circ x$ при некоторой y из M_m. По квазиобратимой x квазиобратная ей матрица определяется однозначно и она обозначается как $y = x'$.

Покажем теперь, что множество M_m образует группу по умножению $\circ$. Действительно, взяв произвольно матрицы x, y, z из M_m, имеем $(x \circ y) \circ z = (x + xy + y) \circ z = x + xy + y + (x + xy + y)z + z = x + xy + y + xz + (xy)z + yz + z == x + xy + y + xz + x(yz) + yz + z = x + x(y + yz + z) + (y + yz + z) = x + x(y \circ z) + y \circ z = x \circ (y \circ z)$

(т.е. ассоциативность для $\circ$ имеет место). Далее, поскольку $x \circ 0 = x = 0 \circ x$, единицей в M_m будет нулевая матрица. Существование же в M_m квазиобратной для x матрицы является прямым следствием из теоремы 1 настоящей работы, где матрица x представлена в виде произведения конечного числа элементарных квазиобратимых матриц из M_m. Поэтому проводить эти (затем повторяющиеся) детали, здесь нет никакой необходимости.

Введенную группу M_m, указав ее групповую композицию, мы соглашаемся записывать как $G_m = UTE_m^0(\aleph, R)$ и называть ее обобщенной элементарной m-унитреугольной группой степени $\aleph \ge 2$ над кольцом R.Эта группа над произвольным ассоциативным кольцом $R \ne \{0\}$ и составляет наш основной объект исследования в этой работе.

2. Стандартные формы в G_m.

При выявлении образующих и определяющих соотношений указанной группы стандартное строение ее элементов играет фундаментальную роль. Пусть m–произвольный (фиксированный) суммируемый номер из I. Для пары i, j из I, для которых $j \ge i + m$, и элемента $\lambda \in R$обозначим через $t_{ij}(\lambda)$ матрицу из M_m, где на позиции $< i, j >$ стоит элемент λ, а прочие же – заполнены нулями. Эти (элементарные) матрицы мы будем называть трансвекциями. Все трансвекции квазиобратимы, а точнее для них имеет место формула $t'_{ij}(\lambda) = -t_{ij}(\lambda)$. Для представления изучаемой группы мы берем естественный алфавит

$$t_{ij}(\lambda), \lambda \in R, i, j \in I, j \ge i + m. \qquad (g)$$

Тот факт, что группа G_m порождается системой (g), также напрямую следует из теоремы 1 настоящей работы.

Упомянутые стандартные формы здесь вводятся следующим образом. Пусть $J = \{p < q < \ldots < r\}$– какая-то конечная система номеров из I. Для номера $i \in J$ и подсистемы $J(i) = \{t \in J : t \ge i\} = \{i < s < \ldots < r\}$ в J, определенные ими произведения вида $f_i = \underset{k \in J(i)}{\Pi} t_{i,k+m}(\lambda_k) = t_{i,i+m}(\lambda_i) \circ t_{i,s+m}(\lambda_s) \circ \ldots \circ t_{i,r+m}(t_r)$, где $\lambda_k \in R$, назовем формами ступени i. В качестве же стандартных форм в G_m здесь объявляются всевозможные (конечные) комбинации

$$f_r \circ \ldots \circ f_q \circ f_p, \quad p < q < \ldots < r. \qquad (sf)$$

Пусть теперь $a = (a_{ij})$ – произвольная матрица из G_m. Составленное по ней множество $I(a) = \{i \in I: a_{ik} \neq 0 \vee a_{ki} \neq 0$ при некотором $k \in I\}$ назовем множеством индексов этой матрицы a (очевидно, $I(a) = \emptyset$, если $a = 0$).

Стандартное строение в изучаемой группе описывается следующим образом.

Теорема 1. Всякая ненулевая матрица a из G_m представляется в стандартном виде (sf), причем такое представление единственно.

Доказательство. Единственность. Пусть матрица a представлена в виде

$$a = f_r \circ \ldots \circ f_q \circ f_p. \qquad (pr)$$

Если допустить, что здесь какой-то номер $t \in \{p, q, \ldots, r\}$ не содержится в $I(a)$, то соответствующий ему сомножитель f_t очевидным образом будет равен нулю. Поэтому опуская все такие сомножители $f_t = 0$ из состава (pr) и без потери общности можно считать, что там $\{p, q, \ldots, r\} \subseteq I(a)$. Но здесь имеет место и обратное включение $\supseteq$. Действительно, в противном случае нашелся бы в $I(a)$ такой номер t, который не входит в $\{p, q, \ldots, r\}$. Но (по определению $I(a)$) так может быть только тогда, когда хотя бы один из элементов a_{tl}, a_{lt} будет отличен от нуля при некотором $l \in I$. А это ввиду равенства (pr) противоречит отсутствию в a таких ненулевых позиций. Итак, мы убедились, что представление (pr) возможно только при совпадении индексов $I(a) = \{p, q, \ldots, r\}$.

Пусть теперь в разложении (pr)

$$f_p = t_{p,p+m}(\lambda_p) \circ t_{q,q+m}(\lambda_q) \circ \ldots \circ t_{r,r+m}(\lambda_r) \quad (\lambda_i \in R).$$

Поскольку здесь в отрезке $f_r \circ \ldots \circ f_q$ p -ая строка – нулевая, формы $f_r \circ \ldots \circ f_q \circ f_p$ и f_p имеют одинаковые p -ые строки. Сравнивая их, будем иметь $\lambda_p = a_{p,p+m}, \lambda_q = a_{q,q+m}, \ldots, \lambda_r = a_{r,r+m}$,

т.е. аргументы из f_p матрицей a также определены однозначно. Переходя теперь от (pr) к равенству $a \circ f_p' = f_r \circ,,, \circ f_q$, мы аналогичным образом заключаем единственность формы f_q и т.д. Описанный процесс на r -ом шаге приводит нас к заключению об единственности формы f_r.

Существование. Стандартная форма $f_r \circ \ldots \circ f_q \circ f_p$, построенная индуктивно как в предыдущей части доказательства теоремы, очевидным образом дает матрицу a. Теорема 1 доказана.

3. *Полный набор соотношений.* Обозначим через $[x, y]^\circ = x \circ y \circ x' \circ y'$ квазикоммутатор элементов x, y из G_m. Применяя это обозначение в алфавите (g) напишем следующие (легко проверяемые) соотношения указанной группы:

1. $t_{ij}(\lambda) \circ t_{ij}(\alpha) = t_{ij}(\lambda + \alpha)$;
2. $[t_{ik}(\lambda), t_{kj}(\alpha)]^0 = t_{ij}(\lambda\alpha)$;
3. $[t_{ik}(\lambda), t_{rj}(\alpha)]^0 = 0, \quad i \neq j, k \neq r$.

Нашей целью в этом пункте является доказательство полноты системы соотношений 1-3 для группы G_m в образующих (g). Для этой цели мы используем усовершенствованный вариант метода трансформации из [7-9]. Далее для непоследних номеров i из I и слов алфавита (g) вводим (бинарные) отношения $\overset{i}{\to}$, положив $W \overset{i}{\to} V$ тогда и только тогда, когда эти слова связаны между собой соотношением $W = X \circ V$, где $X-$ некоторое слово, не содержащее трансвекции вида $t_{kl}(\lambda), \lambda \neq 0, k \leq i$. Эти отношения являются рефлексивными и транзитивными очевидным образом. Для наших дальнейших рассуждений необходима следующая

Теорема 2 (о трансформации букв). Пусть f_p- произвольная форма ступени p и $t_{ks}(\lambda)$ – какая-то ненулевая трансвекция из (g) с индексом $k \neq p$. Для них применяя соотношения 1-3 можно выполнить преобразования $V = f_p \circ t_{ks}(\lambda) \overset{p}{\to} g_p$, где g_p – также некоторая форма ступени p.

Доказательство. Здесь мы различаем два случая. Если $k = p$, то применяя соотношения 3, 1, а также свойство рефлексивности отношения $\overset{p}{\to}$, к требуемой форме мы приходим так $V = f_p(\neq s) \circ [t_{ps}(\lambda_s) \circ t_{ps}(\lambda)] = f_p(\neq s) \circ t_{ps}(\lambda_s + \lambda) = g_p \overset{p}{\to} g_p$, где через $f_p(\neq s)$ обозначена форма f_p, не содержащая букву вида $t_{ps}(*) \neq 0$, и через g_p- форма, которая получены из f_p заменой ее буквы $t_{ps}(\lambda_s)$ на $t_{ps}(\lambda_s + \lambda)$.

Пусть теперь $k > p$. Здесь мы используя соотношения (перестановочности) 3) и 2), будем иметь

$$V = f_p \circ t_{ks}(\lambda) = \underset{l \leq k}{\Pi} t_{pl}(\lambda_l) \circ [\underset{l>k}{\Pi} t_{pl}(\lambda_l) \circ t_{ks}(\lambda)] = \prod_{l<k} t_{pl}(\lambda_l) \circ [t_{pk}(\lambda_k) \circ t_{ks}(\lambda)] \circ \prod_{l>k} t_{pl}(\lambda_l) =$$

$$= [\underset{l<k}{\Pi} t_{pl}(\lambda_l) \circ t_{ps}(\lambda_k \lambda) \circ t_{ks}(\lambda)] \circ t_{pk}(\lambda_k) \circ \underset{l>k}{\Pi} t_{pl}(\lambda_l) = t_{ps}(\lambda_k \lambda) \circ t_{ks}(\lambda) \circ [\underset{l<k}{\Pi} t_{pl}(\lambda_l) \circ$$

$$t_{pk}(\lambda_k)] \circ \underset{l>k}{\Pi} t_{pl}(\lambda_l) \overset{p}{\to} \underset{l \in J(p)}{\Pi} t_{pl}(\lambda_l) = f_p.$$

Теорема 2 доказана.

Теперь у нас все готово, чтобы сформулировать основной результат настоящей работы.

Теорема 3. Обобщенная элементарная m-треугольная группа $G_m = UTE_m^0(\aleph, R)$ порядка $\aleph \geq 2$ над ассоциативным кольцом $R \neq \{0\}$ в образующих (g) представляется соотношениями 1-3 (при $\aleph \leq 3$ неадекватные из этих серий опускаются).

Доказательство. Пусть $W = 0$ – произвольное (нетривиальное) соотношение названной группы в образующих (g). Его выводимость из соотношений 1-3 осуществляется в два этапа.

Этап I. Здесь мы покажем, что слово W можно преобразовать к его стандартному виду $s(W)$ применяя соотношения 1-3. Пусть $J(W) = \{s < k <\ldots< q\}$– множество индексов всех ненулевых трансвекций из W ($J(W)$ очевидным образом содержит в себе ранее введенное $I(W)$). Далее, не теряя общности слово W мы можем считать представленным в виде

$$W \overset{i}{\to} f_i \circ X, \qquad (\overset{i}{\to})$$

где f_i- некоторая форма ступени i (в качестве таковой можно взять, например, первую слева трансвекцию $t_{is}(*) \neq 0$ из W), а X – соответствующее ей дополнение. Пусть $X = t_{pr}(\lambda) \circ \tilde{X}$, т.е. $t_{pr}(\lambda)$ – первая ненулевая буква слова X. Применяя к стыку $f_i \circ t_{pr}(\lambda)$ трансформационную теорему 2, мы будем иметь преобразования $W \overset{i}{\to} [f_i \circ t_{pr}(\lambda)] \circ \tilde{X} \overset{i}{\to} g_i \circ \tilde{X}$, где g_i – также некоторая форма ступени i, т.е. этой операцией (и с учетом транзитивности отношения $\overset{i}{\to}$) мы добились для Wзаписи того же вида $(\overset{i}{\to})$, но уже с укороченной длиной дополнения X. Продолжая эти сокращения и далее (до тех пор, пока не исчерпается все X), мы приходим к записи вида $W \xrightarrow{i} f_i$ (где здесь f_i– уже другая форма ступени i).

Но последнее по определению отношения $\xrightarrow{i}$ означает равенство $W = Y \circ f_i$, где (уже левое) дополнение Y все ненулевые трансвекции $t_{pq}(*)$содержит только в виде $p > i$. Теперь аналогичным образом поступая с Y, вытягиваем из него форму f_k (ступени k), т.е. для рассматриваемого слова будем иметь разложение $W = \tilde{Y} \circ f_k \circ f_i$, где дополнение $\tilde{Y}$ ненулевые трансвекции $t_{pq}(*)$содержит только в виде $p > k$, и т.д. Описанный процесс отщеплений форм через конечное число шагов приводит нас к требуемому стандартному виду $W = f_q \circ \ldots \circ f_k \circ f_i$.

Этап II. Заменой W в заданном соотношении с его стандартной формой, оно приводится к виду $s(W) = 0$. Но по теореме 1 последнее возможно только при нулевых аргументах букв из $s(W)$. А это уже означает выводимость соотношения $W = 0$ из 1-3. Теорема 3 доказана полностью.

Как показывает теорема 3, изученные нами группы $G_m = UTE_m^0(\aleph, R)$ при $\aleph \geq 3$ представляет собой m -унитреугольные квазианалоги классических групп Стейнберга $St(n, \Lambda), n \geq 3$ (определенных над произвольными ассоциативными кольцами Λ с 1 [12].

4. *Предварительные сведения о кольцах.* Основное множество M_m изученной выше группы G_m имеет тесную связь еще с одним вопросом алгебры – с радикальными кольцами. Но, чтобы говорить о них, нам необходимо напомнить определения некоторых понятий из теории колец. Пусть Λ – произвольное (не обязательно с 1) ассоциативное кольцо. Пусть далее, $\circ$ – квазиумножение в Λ (т.е. $x \circ y = x + xy + y,\ x, y \in \Lambda$). Элемент x из Λ назовем квазиобратимым, если для него $x \circ x' = 0 = x' \circ x$ при некотором $x' \in \Lambda$. Очевидно, такой x' по x определяется однозначно и он называется квазиобратным для x. Совокупность всех квазиобратимых элементов Λ^0 из Λ образует группу по умножению (где единицей будет нуль). Она называется квазигруппой кольца Λ . Поскольку в случае наличия 1 в Λ отображение $\Lambda^\bullet \to \Lambda^\circ$, $1 + x \to x$, где $^\bullet$ означает взятие мультипликативной группы, задает изоморфизм, введенное Λ° является обобщением понятия мультипликативной группы на самые общие случаи ассоциативных колец.

Радикал Джекобсона $J(\Lambda)$ начиная с [13, 14] (и других источников) стали вводить в алгебру для любого, не обязательно с 1, ассоциативного кольца Λ (т.е. в общем виде). Все описания радикальности, приводимые там, являются попарно эквивалентными и, поэтому, каждое из них может быть принято за определение этого понятия. Описание, приведенное в [14], больше подходит для наших целей и оно таково: $J(\Lambda)$ – это сумма всех правых квазиобратимых идеалов кольца Λ.

Поскольку всякий квазиобратимый справа идеал является и идеалом левым [14, с. 119], лемма 6), радикал $J(\Lambda)$ образует в Λ всегда его двусторонний идеал. Особый класс в теории колец составляют радикальные кольца. Ассоциативное кольцо Λ, для которого имеет место совпадение $J(\Lambda) = \Lambda$, называется радикальным кольцом. Никакое ненулевое кольцо Λ с 1 радикальным быть не может, ибо в противном случае мы имеем $1 \in \Lambda \to -1 \in J(\Lambda) \to -1 \in \Lambda^0$

– противоречие. Далее, полное матричное кольцо $M(n, R)$ над радикальным $R \neq \{0\}$ иметь единицу не сможет (этот факт в [15] доказан для любого R без 1). Отсюда видно ясно, что о каких-то мультипликативных группах в таких $M(n, R)$ можно говорить только в их присоединенных формах. Руководствуясь этими соображениями, в той же [15] автором были выявлены образующие и определяющие соотношения обобщенной полной линейной группы $GL^0(n,R) = [M(n,R)]^0$ и ее проективного фактора $PGL^0(n,R) = GL^0(n,R)/\ centGL^0(n,R)$ над произвольным радикальным $R \neq \{0\}$. Для нашей цели здесь полезно следующее описание радикальности кольца Λ

$$J(\Lambda) = \Lambda \leftrightarrow \Lambda = \Lambda^0. \qquad (\leftrightarrow)$$

Покажем, что это действительно так.

$\rightarrow$: она видна из включений $J(\Lambda) \subseteq \Lambda^0 \subseteq \Lambda$.

$\leftarrow$: здесь ее мы проводим прямой проверкой для Λ^0 требований радикальности (1)–(4) из [14]:

1) Λ^0 (как собственная часть Λ^0) образует в Λ Λ идеал очевидным образом;

2) $J(\Lambda^0) = J(\Lambda)$;

3) если $\varphi: \Lambda \to \bar{\Lambda}$ – эпиморфизм колец, то для них имеем $\varphi(\Lambda^0) = \varphi(\Lambda) = \bar{\Lambda} = \bar{\Lambda}^0 = J(\bar{\Lambda})$, , что очевидным образом влечет за собой $\varphi(\Lambda^0) \subseteq J(\bar{\Lambda})$;

4) $J(\Lambda/\Lambda^0) = J(\Lambda/\Lambda) = J(\{0\}) = \{0\}$.

Итак мы убедились, что Λ^0, как идеал из Λ, удовлетворяет требованиям быть радикалом Джекобсона для кольца Λ. Поскольку такой радикал кольцом определен однозначно, мы будем иметь $\Lambda = \Lambda^0 = J(\Lambda)$, т.е. стрелка $\leftarrow$ здесь также имеет место.

5. *Новые примеры радикальных колец*. Очевидно, всякое кольцо Λ с нулевым умножением дает нам тривиальный пример радикального кольца (ибо для него $\Lambda^0 = -\Lambda = \Lambda$). Такое кольцо будет простым тогда и только тогда, когда проста его аддитивная группа. Первый нетривиальный пример простого радикального кольца был построен Сансядой [16]. Далее, если составить прямые суммы $\Lambda = \bigoplus_{i\in k} \Lambda_i$ радикальных колец Λ_i, где i пробегает некоторое (произвольное) множество индексов $K, card\ \ K \geq 2$, то они также дают нам непростые радикальные кольца (радикальность видна из $\Lambda^0 = [\bigoplus_{i\in k} \Lambda_i]^0 = \bigoplus_{i\in k} {\Lambda_i}^0 = \bigoplus_{i\in k} \Lambda_i = \Lambda_i$). Здесь же мы, пользуясь представившейся возможностью, укажем еще на одну серию нетривиальных (матричных) радикальных колец.

В п. 1 была показана замкнутость множества $M_m = UTE_m(\aleph, R)$ относительно обычного матричного сложения и умножения. Отсюда очень просто следует, что алгебры $\langle M_m, \cdot +, \cdot \rangle$– ассоциативные кольца. Теорема 1 из того же п.1 показывает, что для них $M_m = G_m \subseteq (M_m)^0$. Последние же вместе с очевидными включениями $(M_m)^0 \subseteq M_m$ дают нам $M_m = (M_m)^0$, т.е. кольца M_m при всех $m \in I$ (согласно установленному критерию $(\leftrightarrow)$) дают нам примеры радикальных колец.

Интересными являются и следующие моменты. Пусть m, по-прежнему означает произвольный номер из I. Относительно него рассмотрим следующие два случая.

а) m – непоследний в I (т.е. $m < t$ при некотором $t \in I$, так будет всегда, если I – бесконечно). Очевидно для них $M_m \supseteq M_t$. Если здесь m и t суммируемы, то оба $M_m M_t$ и $M_t M_m$ (по правилу матричного умножения) содержатся в M_{m+t}. В противном случае (т.е. если сумма $m+t$ не существует) мы имеем $M_m M_t = M_t M_m = \{0\}$ согласно того же правила матричного умножения. Поскольку здесь оба M_{m+t} и $\{0\}$ содержатся в M_t, это M_t M_t образует в M_m собственный двусторонний идеал. Итак, в рассматриваемом случае все радикальные кольца M_m будут непростыми.

b) m – последний номер в I (так может случиться только при конечном I). Здесь как легко видеть, имеет место изоморфизм $M_m \simeq R(0)$, где $R(0)$ означает кольцо, полученное из R заменой его умножения с нулевым. Очевидно, в этом случае кольцо M_m будет простым тогда и только тогда, когда проста аддитивная группа (основного) кольца R .

Некоторым дополнением к сказанному может послужить и следующее. Если множество I и основное кольцо R конечны, то здесь мы будем иметь $|M_k| > |M_m|$ при всех номерах $k < m$ из I . Поэтому в этом случае $M_m,\ m \in I,$ как конечные кольца, имеющие различные порядки, будут попарно неизоморфными. Весьма похоже, что такая неизоморфность $M_k \not\simeq M_m$ будет сохраняться еще для многих других $k < m$ из I .

Проведенные исследования показали нам, что радикальные кольца встречаются в природе не так уж редко, как поначалу показалось. Они находятся там не только в большом изобилии, но и в весьма разнообразном (и абстрактно различном) составе.

Список литературы:

1. Magnus W. Uber n-dimensionale Gottertrans formationen // Acta Math. 1934.–S. 353-367.

2. Green S. M. Generators and relations for the special linear group over a division ring // Proceedings of the American Mathematical Society. 1977. V. 62. №2. P. 229-232.

3. Носков Г. А. Порождающие элементы и определяющие соотношения симплектических групп над некоторыми кольцами // Математические заметки. 1974. Т. 16. №2. С. 237-246.

4. Романовский Н. С. Образующие и определяющие соотношения полной линейной группы над локальным кольцом // Сибирский математический журнал. 1971. Т. 13. №4. С. 922-925.

5. Ши-цзянь Я. Определяющие соотношения n-мерной модулярной группы // Бейцзин шифань дасаюэ кэсюэ луньвень сюанцзи. 1959. С. 48-70.

6. Swan R. G. Generators and relations for certain special linear groups // Advances in Mathematics. 1971. V. 6. №1. P. 1-77.

7. Сатаров Ж. С. Определяющие соотношения в элементарной треугольной группе над кольцами // Математические заметки.1986. Т. 39. №6. С. 785–790.

8. Сатаров Ж. С. Образующие и определяющие соотношения обобщенной полной линейной группы над полулокальными кольцами без единицы I // Известия вузов. Математика. 2006. №10. С. 59-67.

9. Сатаров Ж. С. Образующие и определяющие соотношения обобщенной полной линейной группы над полулокальными кольцами без единицы II // Известия вузов. Математика. 2006. №11. С. 33-41.

10. Сатаров Ж. Образующие элементы и определяющие соотношения в линейных группах: Автореф. Дисс. … д-р физ.-мат. наук. Красноярск, 1998. 31 с.

11. Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И. Основы теории групп. М.: Наука, 1982. 288 с.

12. Милнор Д. Введение в алгебраическую K-теорию. М.: Мир. 1974. 196 с.

13. Херстейн И. Некоммутативные кольца. М.: Мир. 1972. 190 с.

14. Скорняков Л. А. Элементы общей алгебры. М.: Наука. 1983. 272 с.

15. Сатаров Ж. С. Образующие и соотношения некоторых линейных групп над ассоциативными кольцами без единицы. Ош, 2019. 102 с.

16. Sasiada E. Solution of the problem of existence of a simple radical ring // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astr. Phys. 1961. V. 9. P. 257.

References:

1. Magnus, W. (1935). Über n-dimensionale Gittertransformationen, 353-367.

2. Green, S. M. (1977). Generators and relations for the special linear group over a division ring. *Proceedings of the American Mathematical Society*, *62*(2), 229-232.

3. Noskov, G. A. (1974). Porozhdayushchie elementy i opredelyayushchie sootnosheniya simplekticheskikh grupp nad nekotorymi kol'tsami. *Matematicheskie zametki, 16*(2), 237-246. (in Russian).

4. Romanovskii, N. S. (1971). Obrazuyushchie i opredelyayushchie sootnosheniya polnoi lineinoi gruppy nad lokal'nym kol'tsom. *Sibirskii matematicheskii zhurnal, 13*(4), 922-925. (in Russian).

5. Shi-tszyan', Ya. (1959). Opredelyayushchie sootnosheniya n-mernoi modulyarnoi gruppy. *Beitszin shifan' dasayue kesyue lun'ven' syuantszi*, 48-70.

6. Swan, R. G. (1971). Generators and relations for certain special linear groups. *Advances in Mathematics*, *6*(1), 1-77.

7. Satarov, Zh. S. (1986). Opredelyayushchie sootnosheniya v elementarnoi treugol'noi gruppe nad kol'tsami. *Matematicheskie zametki, 39*(6), 785–790. (in Russian).

8. Satarov, Zh. S. (2006). Obrazuyushchie i opredelyayushchie sootnosheniya obobshchennoi polnoi lineinoi gruppy nad polulokal'nymi kol'tsami bez edinitsy I. *Izvestiya vuzov. Matematika,* (10), 59-67. (in Russian).

9. Satarov, Zh. S. (2006). Obrazuyushchie i opredelyayushchie sootnosheniya obobshchennoi polnoi lineinoi gruppy nad polulokal'nymi kol'tsami bez edinitsy II. *Izvestiya vuzov. Matematika,* (11), 33-41. (in Russian).

10. Satarov, Zh. (1998). Obrazuyushchie elementy i opredelyayushchie sootnosheniya v lineinykh gruppakh: Avtoref. Diss. … d-r fiz.-mat. nauk. Krasnoyarsk. (in Russian).

11. Kargapolov, M. I., & Merzlyakov, Yu. I. (1982). Osnovy teorii grupp. Moscow. (in Russian).

12. Milnor, D. (1974). Vvedenie v algebraicheskuyu K-teoriyu. Moscow. (in Russian).

13. Kherstein, I. (1972). Nekommutativnye kol'tsa. Moscow. (in Russian).

14. Skornyakov, L. A. (1983). Elementy obshchei algebry. Moscow. (in Russian).

15. Satarov, Zh. S. (2019). Obrazuyushchie i sootnosheniya nekotorykh lineinykh grupp nad assotsiativnymi kol'tsami bez edinitsy. Osh. (in Russian).

16. Sasiada, E. (1961). Solution of the problem of existence of a simple radical ring. *Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astr. Phys*, *9*, 257.

Работа поступила в редакцию 12.01.2025 г.

Принята к публикации 19.01.2025 г.

Ссылка для цитирования:

Сатаров Ж. С., Исакова В. Т., Жолдошова Ч. Б. Определяющие соотношения в обобщенных элементарных m-унитреугольных группах над ассоциативным кольцом // Бюллетень науки и практики. 2025. Т. 11. №2. С. 36-44. https://doi.org/10.33619/2414-2948/111/04

Cite a (APA):

Satarov, Zh., Isakova, V., & Zholdoshova, Ch. (2025). Defining Relations in Generalized Elementary m-unit Triangular Groups over an Associative Ring. *Bulletin of Science and Practice, 11*(2), 36-44. (in Russian). https://doi.org/10.33619/2414-2948/111/04