УДК 517.928 https://doi.org/10.33619/2414-2948/111/03

ОБ УНИКАЛЬНОСТИ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ФРЕДГОЛЬМА ПЕРВОГО РОДА НА ПОЛУОСИ

*©**Орозмаматова Ж. Ш**., Ошский технологический университет им. М. М. Адышева, г. Ош, Кыргызстан*

ON THE UNIQUENESS OF SOLUTIONS OF LINEAR INTEGRAL FREDHOLM EQUATIONS OF THE FIRST KIND ON THE SEMI-AXIS

*©**Orozmatova Zh**., Osh Technological University named M. M. Adyshev, Osh, Kyrgyzstan*

Аннотация. В работе определены достаточные условия уникальности решений для систем линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода на полуоси. Представлено подробное решение.

Abstract. The paper defines sufficient conditions for the uniqueness of solutions for systems of linear integral Fredholm equations of the first kind on the semiaxis. A detailed solution is presented.

Ключевые слова: линейное уравнение, интегральное уравнение, уравнение.

Keywords: linear equation, integrated equation, equation.

В работе для систем линейных интегральных уравнений Фредгольма третьего рода сформулированы и доказаны теоремы об уникальности на основе метода М. М. Лаврентьева [1].

В исследовании с использованием нового подхода рассмотрены проблемы существования и уникальности решений линейных и нелинейных интегральных уравнений Фредгольма третьего рода с многоточечными особенностями [2].

Работа [3] посвящена изучению одного класса систем линейных и нелинейных интегральных уравнений Фредгольма третьего рода с применением модифицированного метода, предложенного в [4].

Анализируются вопросы уникальности решений одного класса линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода на прямой [5].

Рассматриваются вопросы существования и уникальности решений одного класса линейных интегральных уравнений Вольтера первого рода в пространстве дифференцируемых вектор-функций [6]. Авторы предлагают методы, направленные на доказательство уникальности решений таких систем с учетом особенностей их структуры и свойств соответствующего функционального пространства.

Исследуются системы линейных интегральных уравнений Фредгольма третьего рода, определённые на полуоси, с учетом особенностей, что расширяет область применения теории для более сложных систем и реальных задач [7].

Для начала рассмотрим уравнение следующего типа:

$$Ku \equiv \int_a^\infty K(t,s)u(s)ds = f(t), \quad t \in [a,\infty) \tag{1}$$

где $\int_a^\infty\int_a^\infty |K(t,s)|^2 dsdt < \infty$,

$$K(t,s) = \begin{cases} A(t,s), & a \le s \le t < \infty, \\ B(t,s), & a \le t \le s < \infty. \end{cases} \tag{2}$$

Предполагается, что $B(t,s)$ и A(t, s) — дважды непрерывно дифференцируемые функции на соответствующих интервалах $\{(t,s):\ a \le s \le t < \infty\}$, и $\{(t,s):\ a \le t \le s < \infty\}$, решение $u(t)$ рассматривается в $L_2[a,\infty)$, где $L_2[a,\infty)$, – пространства квадратично суммируемых функций в $[a,\infty)$.

Допускается, что будут выполнены следующие условия:

Производные от $a)$ $H(t,s) = A(t,s) + B(s,t)$, $(t,s) \in G = \{(t,s), a \le s \le t < \infty\}$;
$H'_t(t,s)$, $H'_s(t,s)$, $H''_{st}(t,s) \in L_2(G)$;

б) $\lim\limits_{t\to\infty} H(t,a) \ge 0$, $H'_t(t,a) \le 0$, при $t \in [a,\infty)$, $\lim\limits_{t\to\infty} H'_s(t,s) \ge 0$, при $s \in [a,\infty)$,
$H''_{st}(t,s) \le 0$ при $(t,s) \in G$;

в) применяется как минимум одно из дальнейших условий:

1) $H'_t(t,a) < 0 \ \ \forall \ \ t \in [a,\infty)$,

2) $\lim\limits_{t\to\infty} H'_s(t,s) > 0 \ \ \forall \ \ s \in [a,\infty)$,

3) $H''_{st}(t,s) < 0 \ \ \forall \ (t,s) \in G$.

Уравнение (1), используя соотношение (2), можно записать в виде:

$$\int_a^t A(t,s)u(s)ds + \int_t^\infty B(t,s)u(s)ds = f(t) \tag{3}$$

Теперь умножим обе части равенства (3) на функцию u(t) и затем проинтегрируем полученный результат по области $a \le t < \infty$. Тогда мы получим следующее:

$$\int_a^\infty\int_a^t A(t,s)u(s)u(t)dsdt + \int_a^\infty\int_t^\infty B(t,s)u(s)u(t)dsdt = \int_a^\infty f(t)u(t)dt \tag{4}$$

Из соотношения (4), применяя формулу Дирихле, обретаем

$$\int_a^\infty\int_a^t A(t,s)u(s)u(t)dsdt + \int_a^\infty\int_a^s B(t,s)u(s)u(t)dtds = \int_a^\infty f(t)u(t)dt,$$

т.е. $\int_a^\infty\int_a^t [A(t,s) + B(s,t)]u(s)u(t)dsdt = \int_a^\infty f(t)u(t)dt$.Поскольку $H(t,s) = A(t,s) + B(s,t)$

Тогда:

$$\int_a^\infty\int_a^t H(t,s)u(s)ds\, u(t)dt = \int_a^\infty f(t)u(t)dt \tag{5}$$

Определим обозначения

$$z(t,s) = \int_s^t u(\nu)d\nu \tag{6}$$

Из этого следует

$$d_s z(t,s) = -u(s)ds, \quad u(s)ds = -d_s z(t,s), \quad z(t,s)u(t)dt = \frac{1}{2}d_t\left(z^2(t,s)\right). \tag{7}$$

Посредством формул (6) и (7), а также используя интегрирование по частям и применяя формулу Дирихле к левой части равенства (5), преобразуем последнее в следующий вид

$$-\int_a^\infty\left[\int_a^t H(t,s)d_s z(t,s)\right]u(t)dt = -\int_a^\infty\left[H(t,s)z(t,s)\Big|_a^t - \int_a^t H'_s(t,s)z(t,s)ds\right]u(t)dt =$$

$$= \int_a^\infty H(t,a)z(t,a)u(t)dt + \int_a^\infty\int_a^t H'_s(t,s)z(t,s)u(t)dsdt = \int_a^\infty H(t,a)z(t,a)u(t)dt +$$

$$+\int_a^\infty\int_a^t H'_s(t,s)z(t,s)dsu(t)dt = \frac{1}{2}\int_a^\infty H(t,a)d_t z^2(t,a) + \int_a^\infty\int_s^\infty H'_s(t,s)z(t,s)u(t)dtds = \frac{1}{2}H(t,a)z^2(t,a)\Big|_a^\infty -$$

$$-\frac{1}{2}\int_a^\infty H'_t(t,a)z^2(t,a)dt + \frac{1}{2}\int_a^\infty\left[\int_s^\infty H'_s(t,s)d_t z^2(t,s)\right]ds = \frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}H(t,a)z^2(t,a) -$$

$$-\frac{1}{2}\int_a^\infty H'_t(t,a)z^2(t,a)dt + \frac{1}{2}\int_a^\infty\left[H'_s(t,s)z^2(t,s)\Big|_s^\infty - \int_s^\infty H''_{st}(t,s)z^2(t,s)dtds = \frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}H(t,a)z^2(t,a) -\right.$$

$$-\frac{1}{2}\int_a^\infty H'_t(t,a)z^2(t,a)dt + \frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}\int_a^\infty H'_s(t,s)z^2(t,s)ds - \frac{1}{2}\int_a^\infty\int_a^t H''_{st}(t,s)z^2(t,s)dsdt =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}H(t,a)z^2(t,a) - \frac{1}{2}\int_a^\infty H'_t(t,a)z^2(t,a)dt + \frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}\int_a^\infty H'_s(t,s)z^2(t,s)ds - \frac{1}{2}\int_a^\infty\int_a^t H''_{st}(t,s)z^2(t,s)dsdt =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}H(t,a)\left[\int_a^\infty u(s)ds\right]^2 - \frac{1}{2}\int_a^\infty H'_t(t,a)\left[\int_a^t u(t)ds\right]^2 dt + \frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}\int_a^\infty H'_s(t,s)\left[\int_s^\infty u(\xi)d\xi\right]^2 ds -$$

$$-\frac{1}{2}\int_a^b\int_a^t H''_{st}(t,s)\left[\int_s^t u(\xi)d\xi\right]^2 dsdt,$$

где $z(t,t) = 0$.

Следовательно, из (4) имеем

$$\int_a^\infty\int_a^t H(t,s)u(s)dsu(t)dt = \tag{8}$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}H(t,a)\left[\int_a^\infty u(s)ds\right]^2 - \frac{1}{2}\int_a^\infty H'_t(t,a)\left[\int_a^t u(t)ds\right]^2 dt + \frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}\int_a^\infty H'_s(t,s)\left[\int_s^\infty u(\xi)d\xi\right]^2 ds -$$

$$-\frac{1}{2}\int_a^b\int_a^t H''_{st}(t,s)\left[\int_s^t u(\xi)d\xi\right]^2 dsdt = \int_a^\infty f(t)u(t)dt$$

На основании условия, а) для любого решения u(t) уравнения (1) выводим (8).

Принимаем, что $f(t)\equiv 0$. В этом случае, исходя из обоснованности условий б) и в), из уравнения (8) следует, что: $\int_a^t u(s)ds\equiv 0$, *или* $\int_s^t u(\xi)d\xi=0$. Сначала $\int_t^\infty u(t)dt=0,\ t\in[a,\infty)$, затем, в силу условия в) $u(t)\equiv 0$. Таким образом, выполнено доказательство следующей теоремы:

Теорема 1. Допускается осуществление условий, а), б) и в). В этом случае решение уравнения (1) будет единственным в пространстве $L_2[a,\infty)$.

Пример 1. Исследуем соотношение (1) при a=0, $A(t,s)=\dfrac{s}{(1+t)^3}$ при $(t,s)\in G=\{(t,s):0\le s\le t<\infty\}$; $B(t,s)=\dfrac{t+1}{(s+1)^2}$ при $(t,s)\in G_1=\{(t,s):0\le s\le t<\infty\}$; $(t,s)\in L_2(0,\infty)$. В данном случае:

$$H(t,s)=A(t,s)+B(s,t)= \\ =\frac{s}{(1+t)^3}+\frac{s+1}{(t+1)^2},\quad (t,s)\in G \tag{9}$$

Из (9) имеем:

$$1)\ H_t'(t,s)=-\frac{3s}{(1+t)^4}-\frac{2(s+1)}{(t+1)^3},\ (t,s)\in G, \tag{10}$$

$$1)\ H_s'(t,s)=\frac{1}{(1+t)^3}+\frac{1}{(t+1)^2},\ (t,s)\in G, \tag{11}$$

$$1)\ H_{ts}''(t,s)=-\frac{3}{(1+t)^4}-\frac{2}{(t+1)^3},\ (t,s)\in G, \tag{12}$$

Из (9) получим $\lim\limits_{t\to\infty}H_s'(t,0)=0.$

Из (10) имеем $H_t'(t,0)=-\dfrac{2}{(t+1)^3}<0$ при всех $t\in[0,\infty)$,

Из (11) получим $\lim\limits_{t\to\infty}H_s'(t,s)=0$ при всех $s\in[0,\infty)$,

Из (12) получим $H_{ts}''(t,s)=-\left(\dfrac{3}{(1+t)^4}+\dfrac{2}{(t+1)^3}\right)<0,(t,s)\in G$

Таким образом, выполняются все условия вышеуказанной теоремы, а именно условия, а), б), в). Следовательно, решение следующего интегрального уравнения $\int_0^t\dfrac{s}{(1+t)^3}u(s)ds+\int_t^\infty\dfrac{(t+1)}{(s+1)^2}u(s)ds=f(t),\quad t\in[0,\infty)$ единственно в пространстве $L_2[0,\infty)$.

Список литературы:

1. Иманалиев М. И., Асанов А. О решениях для систем линейных интегральных уравнений Фредгольма третьего рода // Докл.РАН. 2010. Т. 430. №6. С. 1-4.

Т. 11. №2 2025
https://doi.org/10.33619/2414-2948/111

2. Asanov A., Matanova K., Asanov R. A class of linear and nonlinear Fredholm integral equations of the third kind // Kuwait J. of Scitnce. 2017. V. 44. №1. P. 17-28.

3. Иманалиев М. И., Асанов А., Асанов Р. А. О классе систем линейных и нелинейных интегральных уравнений Фредгольма третьего рода с многоточечными особенностями // Дифференциальные уравнения. 2018. Т. 54. №3. С. 387-397.

4. Asanov A. Regularization, uniquentss and existenct of Solutions of Volterra equatinons of the first kind, VSP, Utrecht, The Netherlands, 1998.

5. Asanov A., Orozmamatova Zh. About uniqueness of solutions of fredholm linear integral equations of the first kind in the axis // Filomat. 2019. V. 33. №5. P.1329-1333.

6. Орозмаматова Ж. Ш., Тойгонбаева А. К., Камбарова А. Д. Регуляризация решений одного класса систем линейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода в пространстве дифференцируемых вектор-функций на оси // Бюллетень науки и практики. 2024. Т. 10.№5. С. 15-22. https://doi.org/10.33619/2414-2948/102/01

7. Асанов А., Орозмаматова Ж. Ш. О системах линейных интегральных уравнений Фредгольма третьего рода определенных на полуоси // Синергия. 2018. №4. С. 33-39.

References:

1. Imanaliev, M. I., & Asanov, A. (2010). O resheniyakh dlya sistem lineinykh integral'nykh uravnenii Fredgol'ma tret'ego roda. *Doklady RAN, 430*(6), 1-4. (in Russian).

2. Asanov, A., Matanova, K., & Asanov, R. (2017). A class of linear and nonlinear Fredholm integral equations of the third kind. *Kuwait J. of Scitnce, 44*(1), 17-28.

3. Imanaliev, M. I., Asanov, A., & Asanov, R. A. (2018). O klasse sistem lineinykh i nelineinykh integral'nykh uravnenii Fredgol'ma tret'ego roda s mnogotochechnymi osobennostyami. *Differentsial'nye uravneniya, 54*(3), 387-397. (in Russian).

4. Asanov, A. (1998). *Regularization, uniqueness and existence of solutions of Volterra equations of the first kind* (11), VSP.

5. Asanov, A., & Orozmamatova, Zh. (2019). About uniqueness of solutions of fredholm linear integral equations of the first kind in the axis. *Filomat, 33*(5),1329-1333.

6. Orozmamatova, Zh., Toigonbaeva, A., & Kambarova, A. (2024). Regularization of Solutions of One Class of Systems of Linear Volterra Integral Equations of the First Kind in the Space of Differentiable Vector Functions on the Axis. *Bulletin of Science and Practice, 10*(5), 15-22. (in Russian). https://doi.org/10.33619/2414-2948/102/01

7. Asanov, A., & Orozmamatova, Zh. Sh. (2018). O sistemakh lineinykh integral'nykh uravnenii Fredgol'ma tret'ego roda opredelennykh na poluosi. *Sinergiya,* (4), 33-39. (in Russian).

Работа поступила в редакцию 28.12.2024 г.

Принята к публикации 10.01.2025 г.

Ссылка для цитирования:

Орозмаматова Ж. Ш. Об уникальности решений линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода на полуоси // Бюллетень науки и практики. 2025. Т. 11. №2. С. 31-35. https://doi.org/10.33619/2414-2948/111/03

Cite as (APA):

Orozmamatova, Zh. (2025). On the Uniqueness of Solutions of Linear Integral Fredholm Equations of the First Kind on the Semi-Axis. *Bulletin of Science and Practice, 11*(2), 31-35. (in Russian). https://doi.org/10.33619/2414-2948/111/03