

УДК 517.928

https://doi.org/10.33619/2414-2948/111/02

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ МЕТОДОВ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ОЦЕНКИ ИНТЕГРАЛОВ СОДЕРЖАЩИХ БОЛЬШОЙ ПАРАМЕТР

- ©**Алыбаев К. С.**, ORCID: 0000-0002-7962-534X, SPIN-код: 2396-5503, д-р физ.-мат. наук,
Жалал-Абадский государственный университет им. Б. Осмонова,
г. Джалал-Абад, Кыргызстан, alybaevkurmanbek@rambler.ru
- ©**Нарымбетов Т. К.**, ORCID: 0000-0003-0921-4542, SPIN-код: 7607-8505,
канд. физ.-мат. наук, Научно-исследовательский медико-социальный институт,
г. Джалал-Абад, Кыргызстан, talant83@mail.ru
- ©**Матанов Ш. М.**, ORCID: 0000-0002-9979-7069, SPIN-код: 7182-1303,
канд. физ.-мат. наук, Международный университет Ала-Тоо,
г. Бишкек, Кыргызстан, sherali.matanov@alatoou.edu.kg
- ©**Эрматали уулу Б.**, ORCID: 0009-0007-7538-5354, SPIN-код: 6820-5273,
Жалал-Абадский государственный университет им. Б. Осмонова,
г. Джалал-Абад, Кыргызстан, ermatalievbayaman@gmail.com

FUNCTIONS OF A COMPLEX VARIABLE WITH A LARGE PARAMETER AND CONSTRUCTION OF REGIONS

- ©**Alybaev K.**, ORCID: 0000-0002-7962-534X, SPIN-code: 2396-5503, Dr. habil.,
Jalal-Abad State University named after B. Osmonov,
Jalal-Abad, Kyrgyzstan, alybaevkurmanbek@rambler.ru
- ©**Narymbetov T.**, ORCID: 0000-0003-0921-4542, SPIN-code: 7607-8505, Ph.D.,
Research Medical and Social Institute, Jalal-Abad, Kyrgyzstan, talant83@mail.ru
- ©**Matanov S.**, ORCID: 0000-0002-9979-7069, SPIN-code: 7182-1303, Ph.D.,
International University Ala-Too, Bishkek, Kyrgyzstan, sherali.matanov@alatoou.edu.kg
- ©**Ermatali uulu B.**, ORCID: 0009-0007-7538-5354, SPIN-code: 6820-5273, Jalal-Abad State
University named after B. Osmonov, Jalal-Abad, Kyrgyzstan, ermatalievbayaman@gmail.com

Аннотация. В работе проведен сравнительный анализ асимптотической оценки интегралов содержащих большой положительный параметр. Необходимость исследования асимптотического поведения таких интегралов объясняется тем, что математические задачи для различных процессов сводятся к исследованию обыкновенных дифференциальных уравнений. Решения таких уравнений представляются через специальные или другие функции. Асимптотические поведения таких функций требуют исследование интегралов содержащих большой параметр. Рассмотрены два вида интеграла в комплексной плоскости. Для получения асимптотики к одному из интегралов применяется метод перевала, а к другому метод спуска. Подробное описание приведено в работе. Выявлены сходство и различие этих методов.

Abstract. In this paper, a comparative analysis of the asymptotic estimate of integrals containing a large positive parameter is carried out. The need to study the asymptotic behavior of such integrals is explained by the fact that mathematical problems for various processes are reduced to the study of ordinary differential equations. Solutions of such equations are represented through special or other functions. Asymptotic behavior of such functions requires the study of integrals containing a large parameter. Two types of integral in the complex plane are considered. To obtain asymptotics, the saddle-point method is applied to one of the integrals, and the descent method is

applied to the other. A detailed description is given in paper. Similarities and differences between these methods are revealed.

Ключевые слова: интеграл, большой параметр, контур интегрирование, линии уровня, сходимость, асимптотическая оценка.

Keywords: integral, large parameter, integration contour, level lines, convergence, asymptotic estimate.

Многие математические задачи в физике, механике и других отраслей науки приводятся к исследованию специальных линейных дифференциальных уравнений второго порядка, с переменными коэффициентами. Решениями таких уравнений являются специальные функции, которые выражаются через интегралы [1, 2]. Одним из таких интегралов являются интегралы вида

$$F_1(\lambda) = \int_{(\gamma_1)} \varphi(\tilde{u}) \exp(\lambda f(\tilde{u})) d\tilde{u}, \quad (1)$$

где $\lambda \rightarrow \infty$ большой параметр.

В (1), интеграл может быть одномерным или многомерным. Мы рассмотрим только одномерный случай. В этом случае область интегрирования (γ_1) может быть интервалом вещественной оси, контуром в комплексной плоскости.

Если в (1): функция $f(\tilde{u})$ вещественнозначная, а Ω некоторый интервал в вещественной оси, то для получения асимптотической оценки (1) применяются методы интегрирование по частям или Лапласа; $f(\tilde{u}) = ia(\tilde{u})$, где $a(\tilde{u})$ – вещественно значная функция, то применяется метод стационарной фазы. Об этих методах более подробно можно знакомится в работах ряда авторов [3-7].

Исследования сингулярно возмущенных уравнений с аналитическими функциями (СВУ) проведенные в работах авторов [8-10, 14-21] показывают, что асимптотическое поведение решения определяются, в основном, интегралами вида:

$$F_2(\lambda) = \int_{(\gamma_2)} \varphi(\tilde{u}) \exp \lambda [f(u) - f(\tilde{u})] d\tilde{u}, \quad (2)$$

где $\Omega \subset \mathbb{C}$ – комплексная плоскость, а Ω – ограниченная область; $\lambda \rightarrow +\infty$ большой параметр ($\lambda = \frac{1}{\varepsilon}, 0 < \varepsilon$ – малый вещественной параметр); (γ_2) – путь интегрирование соединяющая точки $u_0, u \in \Omega$.

Основная цель настоящей работы, провести сравнительный анализ методов асимптотической оценки интегралов (1), (2), когда (γ_1) и (γ_2) контуры в комплексной плоскости.

Определение 1. Если $T_0 \in \Omega$ и $f(T_0) = 0, \dots, f^{(n-1)}(T_0) = 0, f^{(n)}(T_0) \neq 0$, то точка T_0 называется n кратным нулем функции $f(u)$. Если $n=1$, то нуль называется простым [8].

Определение 2. Если T_0 n кратный нуль функции $f(u)$, то будем говорить, что T_0 является точкой перевала функции $Re f(u)$ и $Im f(u)$. n назовём порядком точки перевала.

Конформное отображение области и преобразование интегралов

Пусть выполняются условия:

У1. $\varphi(x), f(u) \in Q(\Omega)$ пространство аналитических функций в области Ω , а $\Omega \subset C$ и односвязная, открытая, ограниченная область.

У2. $T_0 \in \Omega$ и $f(T_0) = 0, \dots, f^{(n-1)}(T_0) = 0, f^{(n)}(T_0) \neq 0$; $\forall u \in \Omega \wedge u \neq T_0$ ($f(u) \neq 0, f'(u) \neq 0$).

Согласно У.1-У.2 функция $f(u)$ можно представить в виде $f(u) = (u - T_0)^n f_0(u)$, где $f_0(u_0) \neq 0$. Тогда преобразование

$$t = (u - T_0) f_0^{\frac{1}{n}}(u), \tag{3}$$

где $f_0^{\frac{1}{n}}(u)$ означает любую непрерывную, однозначную ветвь корня n -й степени из $f_0(u)$; является локально взаимно-однозначным и конформным в окрестности точки T_0 и отображает окрестность точки T_0 в некоторый круг плоскости t с центром в точке $(0;0)$.

Доказательство. Из (3) имеем

$$\frac{dt}{du} = f_0^{\frac{1}{n}}(u) + (u - T_0) \frac{1}{n} f_0^{\frac{1}{n}-1}(u).$$

Отсюда полагая $u = T_0$ получим

$$\frac{dt}{du} = f_0^{\frac{1}{n}}(T_0) \neq 0.$$

Согласно У.2 $\frac{dt}{du} \neq 0$ (если $u \neq T_0$). Лемма доказана. Из (3) имеем

$$f(u) = t^n$$

В плоскости t рассмотрим функцию

$$A(t) = t^n \tag{4}$$

Не ограничивая общности считаем, область Ω является окрестностью точки T_0 . Пусть $D = \{t \in C, |t| < r_0\}$ – круг, на который отображается область Ω , согласно Леммы 1. Далее, не ограничивая общности можно рассмотреть случай, $n = 2$ [18]. Из (4) имеем $A(t) = t^2$. Полагая $t = t_1 + it_2$ рассмотрим функции $\operatorname{Re} A(t) = t_1^2 - t_2^2$, $\operatorname{Im} A(t) = 2t_1 t_2$. Линия уровня $(p_0) = \{t \in D, \operatorname{Re} A(t) = 0\}$ круг D разделяет на четыре сектора D_1, D_2, D_3, D_4 , причем в каждом из этих секторов $\operatorname{Re} A(t)$ положительна или отрицательна. Отрицательные сектора обозначим D_1, D_2 , а положительные D_3, D_4 .

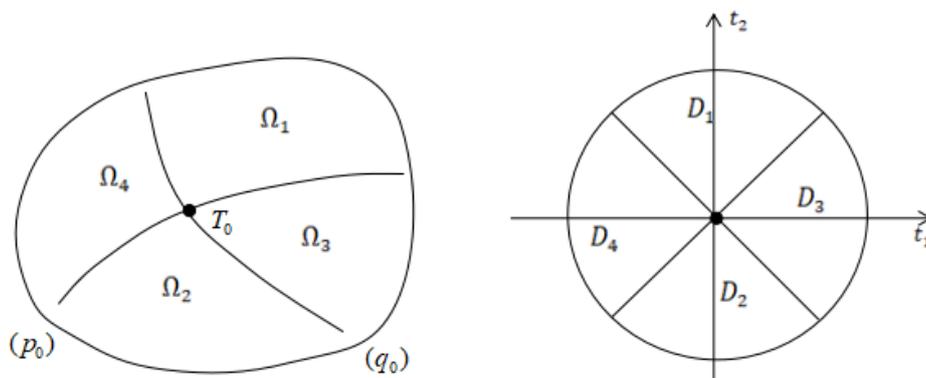


Рисунок 1. Сектора D_j и $\Omega_j, (j = 1, 2, 3, 4)$

Поскольку преобразование (3) обратима, то существует функция $u = \psi(t)$ отображающая круг D в область Ω . Таким образом вместо (1)-(2) можно рассмотреть интегралы:

$$F_{11}(\varepsilon) = \int_{\gamma^*} f_1(\tau) \exp \frac{A(\tau)}{\varepsilon} d\tau, \quad (5)$$

$$F_{21}(t, \varepsilon) = \int_{\gamma^*} f_1(\tau) \exp \frac{A(t) - A(\tau)}{\varepsilon} d\tau, \quad (6)$$

где $\lambda = \frac{1}{\varepsilon}$, $0 < \varepsilon$ -достаточно малый вещественный параметр, $f_1(\tau) = \varphi(\tau) \cdot \psi'(\tau)$.

После проведенного преобразования интегралы (5)-(6) рассматриваются в круге D .

Асимптотическая оценка интеграла (5). Для асимптотической оценки интеграла (5), в комплексных областях, применяют метод перевала [3-7]. Суть этого метода заключается в следующем: Основной вклад в асимптотику интеграла дают те точки, где достигается:

$$\min_{\gamma^* \in \Gamma} \max_{\tau \in \gamma^*} \operatorname{Re} A(\tau), \quad (7)$$

где Γ – множество контуров, начало и конец, которых совпадает с началом и концами контуров γ^* . Условие У.1 позволяет деформировать контур γ^* [22] и выбрать наиболее оптимальный вариант, для которого выполняется (7). К сожалению, еще не разработан наиболее простой алгоритм позволяющий найти такой контур. Некоторые приемы, позволяющие это сделать, рассмотрены в [5]. Метод перевала также носит название «метод наискорейшего спуска», «метод седловой точки».

Отметим, при выборе (деформирование) путей интегрирования должно учитываться условие $A(\tau) \leq 0$, т.е. для сходимости интеграла (5) в D необходимо $\forall t \in D (\operatorname{Re} A(t) \leq 0)$. При этом знак равенство имеет место только на границах D . Действительно существует $t_0 \in D$ и t_0 внутренняя точка D и $\operatorname{Re} A(t_0) = 0$. Тогда существует линия уровня $(p_0) = \{t \in D, \operatorname{Re} A(t) = \operatorname{Re} A(t_0) = 0\}$.

Линия (p_0) проходит через точку t_0 и утирается к границе D и область D делит на части D_1 и D_2 . Возьмём произвольную точку $\tilde{t} \in (p_0)$ и проведем линию уровня $(\tilde{q}) = \{t \in D, \operatorname{Im} A(t) = \operatorname{Im} A(\tilde{t}) = \tilde{q} - \text{const}\}$.

Рассмотрим $\operatorname{Re} A(t)$ вдоль (\tilde{q}) . Вдоль (\tilde{q}) $\operatorname{Re} A(t)$ строго монотонна и $\operatorname{Re} A(\tilde{t}) = 0$. Тогда должно быть

$$(\forall t \in D_1 (\operatorname{Re} A(t) < 0) \wedge \forall t \in D_2 (\operatorname{Re} A(t) > 0)) \vee (\forall t \in D_1 (\operatorname{Re} A(t) > 0) \wedge \forall t \in D_2 (\operatorname{Re} A(t) < 0)).$$

Таким образом в обоих случаях существует часть области D , где $\operatorname{Re} A(t) > 0$. Это противоречит условию сходимости (5). Таким образом $\operatorname{Re} A(t) = 0$ только на граничных точках области D . В частности, если D замкнутая, то точки для которых $\operatorname{Re} A(t) = 0$ определяет линию уровня (p_0) . Отсюда следует в (5) начало контура должна принадлежать (p_0) или должна быть внутренней точкой D .

Таким образом, для интеграла (5) начало и конец контура должна лежать на отрицательных секторах или на границах секторов. С другой стороны, искомый, контур γ^* должна проходить через точку перевала (в нашем случае через точку $(0;0)$) и лежать на

секторах D_1, D_2 . Если контур γ^* будет лежать только на одном из этих секторов, то не выполняется минимаксное свойство контура. Для уточнения γ^* рассмотрим линию уровня:

$$(q_0) = \{t \in D, \operatorname{Im} A(t) = 2t_1 t_2 = 0\}.$$

Линия (q_0) в точке $(0;0)$ разветвляется. Одна из ветвей $(q_{01}) = \{t \in D, t_1 = 0, -r_0 < t_2 < r_0\}$ проходит через сектора D_1, D_2 , а другая $(q_{02}) = \{t \in D, -r_0 < t_1 < r_0, t_2 = 0\}$ через сектора D_3, D_4 . Так как контур γ^* должна пройти через сектора D_1, D_2 , то целесообразно заменить γ^* ветвью (q_{01}) [3-4]. Тогда имеем

$$\int_{\gamma^*} f_1(\tau) \exp \frac{A(\tau)}{\varepsilon} d\tau = \int_{(q_{01})} f_1(\tau) \exp \frac{A(\tau)}{\varepsilon} d\tau = \int_{t_0}^{T_1} f_1(\tau) \exp \frac{-\tau_2^2}{\varepsilon} id\tau_2. \quad (8)$$

В (8) t_0 и T_1 числа разных знаков, следовательно основной вклад в интеграле (8) даёт окрестность $-\delta \leq \tau_2 \leq \delta$ ($\delta > 0$ и достаточно малое число). Учитывая это из (8) имеем

$$i \int_{t_0}^{T_1} f_1(\tau) \exp \frac{-\tau_2^2}{\varepsilon} id\tau_2 \approx i \int_{-\delta}^{\delta} f_1(\tau) \exp \frac{-\tau_2^2}{\varepsilon} id\tau_2$$

К последнему интегралу применяя метод Лапласа получим $F_{11}(\varepsilon) \approx \sqrt{\pi\varepsilon} (if_1(0))$.

Заметим во многих случаях, оценка интегралов (5) методом перевала сводится к методу Лапласа. Позже эту оценку получим другим путем и докажем, что она не улучшаемая.

Асимптотическая оценка интеграла (6). Теперь рассмотрим интеграл (6) и секторы D_1, D_2, D_3, D_4 .

Для t_0 возможны различные варианты: $t_0 \in D_1, t_0 \in D_2, t_0 \in D_3, t_0 \in D_4, t_0 = 0$.

а) Сначала рассмотрим случай $t_0 \in D_4, t_0 \in R$ – множество действительных чисел.

Если $t_0 \in D_4$, то $t_0 < 0$.

Предварительные построения. Введем обозначение $D_1^1 = D_1 \cup D_2 \cup D_4$, при этом считаем, ветви линии уровня (p_0) ограничивающие область D_1^1 принадлежат этой области.

Область D_1^1 частью оси t_1 , принадлежащее D_1^1 , разделяется на две симметричные части. Эти части обозначим D_1^{11}, D_1^{12} .

Асимптотическую оценку (6) проведем в D_1^{11} .

Согласно принципа симметрии в D_1^{12} получаются аналогичные оценки (Рисунок 2).

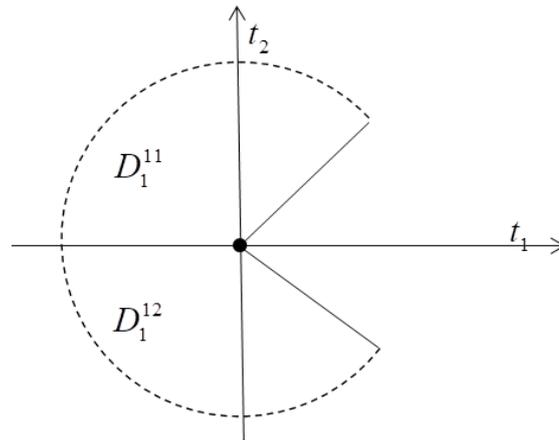


Рисунок 2. Области D_1^{11}, D_1^{12}

Введем следующие линии

$$\begin{aligned} (p_{t_0}) &= \{t \in D_1^1, t_1^2 - t_2^2 = t_0^2\}; \\ (p_{01}) &= \{t \in D_1^1, t_1 - t_2 = 0\}; \\ (p_{02}) &= \{t \in D_1^1, t_1 - t_2 = -\varepsilon^\lambda, 0 < \lambda < 1\}; \end{aligned}$$

$$(p_{03}) = \{t \in D_1^1, t_1 - t_2 = -q_1, 0 < q_1 - \text{const не зависящая от } \varepsilon\};$$

$$(p_{04}) = \{t \in D_1^1, t_1 - t_2 = t_0, t_0 < -q_1\};$$

$$(p_{05}) = \{t \in D_1^1, t_1 + t_2 = q, 0 \leq t_1 \leq \frac{(q_1 - \varepsilon^\lambda)}{2}, \frac{(q_1 + \varepsilon^\lambda)}{2} \leq t_2 \leq q\};$$

Область ограниченный (p_{t_0}) отрезком $(-r_0, t_0]$ и границей круга D , обозначим D_{11}^{11} ; $(p_{t_0}), (p_{04})$, границей D , обозначим D_{12}^{11} ; отрезком $[t_0; -q]$, $(p_{04}), (p_{03})$ обозначим D_{13}^{11} ; отрезком $[-q; -\varepsilon^\lambda]$, $(p_{03}), (p_{02}), (p_{05})$ обозначим D_{14}^{11} ; отрезком $[-\varepsilon^\lambda; 0]$, $(p_{02}), (p_{01}), (p_{06})$ обозначим D_{15}^{11} ; $(p_{06}), (p_{01}), (p_{02})$ и границей D обозначим D_{16}^{11} ; $(p_{05}), (p_{02}), (p_{03})$ и границей D обозначим D_{17}^{11} (Рисунок 3).

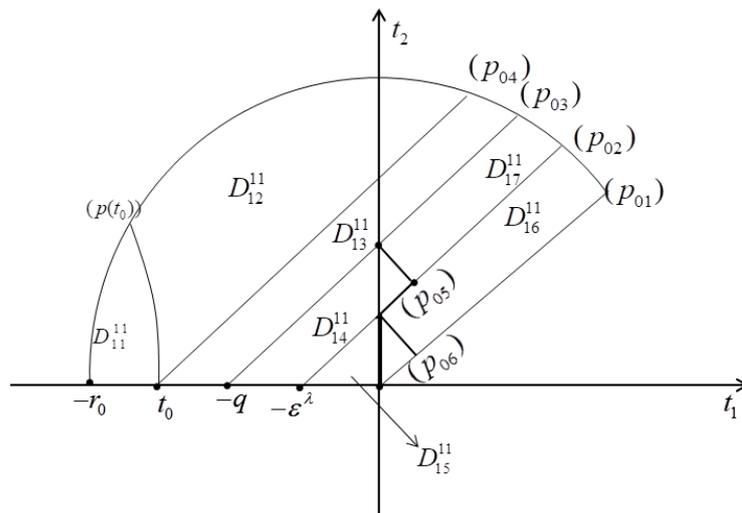


Рисунок 3. Области $D_{1j}^{11} (j = 1, \dots, 7)$.

Критерий сходимости интеграла. Лемма 2. Если по выбранным путям интегрирования $\text{Re} A(t)$ не возрастает, то интеграл (6) ограничена при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Доказательство. По условию $A(t) \in Q(D)$, то будем считать, что путь состоит из частей линии уровней функций $\text{Re} A(t)$ и $\text{Im} A(t)$.

1. Пусть γ^* часть линии уровня функции $\operatorname{Re} A(t)$ соединяющая точки t_0 и t . При таких условиях имеем:

$$F_{21}(t, \varepsilon) = \int_{t_0}^t f_1(\tau) \exp \frac{A(t) - A(\tau)}{\varepsilon} d\tau.$$

$\forall t \in \gamma_2^*(\operatorname{Re} A(t) - \operatorname{const})$, тогда

$$F_{21}(t, \varepsilon) = \int_{t_0}^t f_1(\tau) \exp \frac{i(\operatorname{Im} A(t) - \operatorname{Im} A(\tau))}{\varepsilon} d\tau.$$

отсюда имеем $|F_{21}(t, \varepsilon)| \leq O(1)$.

2. Пусть γ^* часть линии уровня функции $\operatorname{Im} A(t)$. Известно [3, 5, 7], вдоль γ^* функция $\operatorname{Re} A(t)$ строго монотонна. Согласно условия Леммы 2 рассмотрим случай, когда вдоль γ^* $\operatorname{Re} A(t)$ строго убывает. Тогда $\operatorname{Re}(A(t) - A(\tau)) \leq 0$, следовательно

$$|F_2(t, \varepsilon)| = \left| \int_{t_0}^t f_1(\tau) \exp \frac{A(t) - A(\tau)}{\varepsilon} d\tau \right| \leq O(1) \int_{t_0}^t \exp \frac{\operatorname{Re} A(t) - \operatorname{Re} A(\tau)}{\varepsilon} d\tau \leq O(1)$$

Объединяя рассмотренные случаи убеждаемся, если γ^* состоит из двух кусков линии уровней, то $|F_2(t, \varepsilon)| \leq O(1)$. Более точные оценки можно получить в зависимости от того, функция $A(t)$ на γ^* имеет или не имеет нулей. Лемма доказана.

Выбор путей интегрирования и асимптотические оценки. Пути интегрирования для асимптотической оценки интеграла (6), выберем согласно Леммы 2. Далее запись $(p)[t_0, t_0^1]$ – означает часть кривой (p) соединяющей точки t_0, t_0^1 .

Пусть $t \in D_{12}^{11}$. Путь состоит из части: $(p(t_0))[t_0, \tilde{t}]$ и прямой $(\{\tau_1 - \tau_2 = \tilde{t}_1 - \tilde{t}_2\})[\tilde{t}, t]$.

Если $t \in D_{13}^{11} \cup D_{14}^{11} \cup D_{15}^{11}$, то путь состоит из части: (оси t_1) $[t_0, T_1]$ и прямой $(\{\tau_1 - \tau_2 = T\})[T, t]$.

Для $t \in D_{16}^{11} \cup D_{17}^{11}$, путь состоит из части: (оси t_1) $[t_0, 0]$; и прямой $(\{\tau_1 - \tau_2 = 0\})[0, T_2]$; прямой $(\{\tau_1 + \tau_2 = \tilde{q}, \varepsilon^\lambda \leq \tilde{q}\})[T_2, t]$. Условия Леммы 2 проверяются непосредственно. Согласно выбранных путей интегрирования, без особого труда, получаются следующие асимптотические оценки

$\forall t \in D_{12}^{11} \cup D_{13}^{11} \cup D_{17}^{11} (|F_{21}(t, \varepsilon)| \leq M\varepsilon, 0 < M - \operatorname{const}$ не зависящая от ε);

$\forall t \in D_{14}^{11} (|F_{21}(t, \varepsilon)| \leq M\varepsilon^{1-\lambda}, 0 < \lambda < 1)$;

$\forall t \in D_{15}^{11} (|F_{21}(t, \varepsilon)| \leq M\varepsilon^\lambda, 0 < \lambda < 1)$;

$\forall t \in D_{16}^{11} (|F_{21}(t, \varepsilon)| \leq M\varepsilon^{1-\lambda} \text{ или } \varepsilon^\lambda, 0 < \lambda < 1)$;

Сравним $\varepsilon^{1-\lambda}$ и ε^λ .

1) Пусть $1 - \lambda \leq \lambda$, тогда $\frac{1}{2} \leq \lambda < 1$. Для этого случая надо взять ε^λ .

2) Пусть $\lambda \leq 1 - \lambda$ или $0 < \lambda \leq \frac{1}{2}$. Определяющим будет $\varepsilon^{1-\lambda}$.

Сравнение случаев 1) - 2) показывает, наиболее оптимальным является оценка

$\forall t \in D_{14}^{11} \cup D_{15}^{11} \cup D_{16}^{11} (|F_{21}(t, \varepsilon)| \leq M\sqrt{\varepsilon})$ и эта оценка не улучшаемая.

б) $t_0 \in D_3$ рассматривается аналогично.

в) Пусть $t_0 \in D_1$. Не ограничивая общности считаем $t_0 = t_{02} \in (\operatorname{ocut}_2)(t_{02} > 0)$.

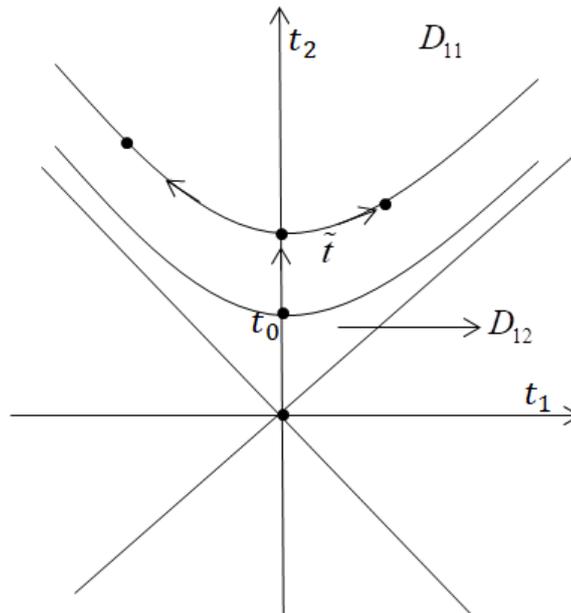


Рисунок 4. Области D_{11}, D_{12} .

Рассмотрим случай $t_0 \in D_1$ и линию уровня $(p(t_0)) = \{t \in D_1, t_1^2 - t_2^2 = -t_{02}^2\}$.

Линия $(p(t_0))$ область D_1 делить на части D_{11}, D_{12} (Рисунок 4).

Если $t \in D_{12}$, то не существует пути интегрирования удовлетворяющие условиям Леммы 2. Действительно если $t \in D_{12}$, то существует линия уровня $(p(t)) = \{t \in D_1, t_1^2 - t_2^2 = p - \text{const}\}$ проходящая через точку t .

При этом $t_1^2 - t_2^2 = p(t) > p(t_0)$. Следовательно, при любом выборе пути, интеграл (6) будет неограниченным при $\varepsilon \rightarrow 0$. Остаётся рассмотреть только случай $t \in D_{11}$.

Для этого случая, согласно критерия сходимости интеграла, путь интегрирования состоит из части: (оси t_2) $[t_0, \tilde{t}]$ и линии уровня

$$(p(\tilde{t})) = \{t \in D_1, t_1^2 - t_2^2 = \tilde{t}_1^2 - \tilde{t}_2^2 = p - \text{const}\} [\tilde{t}, t] \text{ (Рисунок 4)}.$$

Если, t_0 не принадлежит достаточно малой окрестности точки $(0;0)$, зависящая от ε , то получим $\forall t \in D_{11} (|F_2(t, \varepsilon)| \leq O(\varepsilon))$.

г) Аналогично рассматривается случай $t_0 \in D_2$.

д) $t_0 = 0$. Для этого случая $t \in D_1$ или D_2 . Если $t \in D_3$ или D_4 , то по любым путям, соединяющим точки t_0 и t функция $Re t^2$ будет не убывающей, что противоречит условию Леммы 2. Достаточно рассмотреть $t \in D_1$, случай D_2 рассматривается аналогично. Сектор D_1 осью t_2 разделяется на две симметричных частей D_1^{10}, D_1^{20} .

Пусть D_1^{10} ограничена положительной частью оси t_2 и ветвью (p_{01}) (Рисунок 5). Как и в случае а) область D_1^{10} с помощью линий $(p_{01}), (p_{02}), (p_{03}), (p_{04})$ разделим на несколько частей $D_{1j} (j = 1, 2, 3, 4)$ (Рисунок 5).

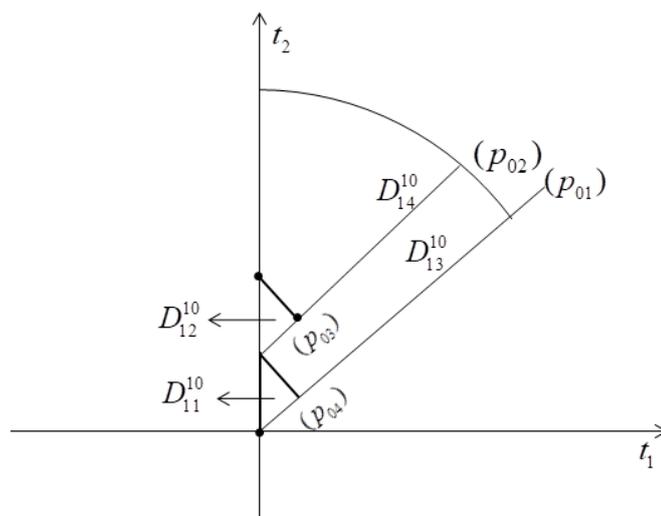


Рисунок 5. Деление области D_1^{10}

$$\begin{aligned} (p_{01}) &= \{t \in D_1^{10}, t_1 - t_2 = 0\}; \\ (p_{02}) &= \{t \in D_1^{10}, t_1 - t_2 = -\varepsilon^\lambda, (0 < \lambda < 1)\}; \\ (p_{03}) &= \{t \in D_1^{10}, t_1 + t_2 = q^\lambda, 0 < q - \text{не зависит от } \varepsilon\}; \\ (p_{04}) &= \{t \in D_1^{10}, t_1 + t_2 = \varepsilon^\lambda, 0 < \lambda < 1\}. \end{aligned}$$

Путь интегрирования состоит из части:

$$(p_{01})[0, \tilde{t}]; (\tau_1 + \tau_2 = \tilde{q}, 0 \leq \tilde{q})[\tilde{t}, t].$$

Согласно выбранных путей интегрирования имеем оценки

$$\forall t \in D_{11}^{10} \cup D_{12}^{10} \cup D_{13}^{10} (|F_2(t, \varepsilon)| \leq O(\sqrt{\varepsilon})),$$

$$\forall t \in D_{14}^{10} \cup D_{15}^{10} (|F_2(t, \varepsilon)| \leq O(\varepsilon)).$$

Согласно вышеизложенного метод, примененный при исследовании асимптотического поведения интеграла (6), назовём методом спуска.

Выводы

Использование свойств поверхностей и линии уровня гармонических функций объединяет эти методы. Метод перевала и наиболее быстрого спуска асимптотической оценки интеграла (5) решают локальную задачу, в плане выбора определенного пути интегрирования, а метод спуска глобальную задачу асимптотической оценки интеграла (6) в некоторой области, что является различием этих методов.

Список литературы:

1. Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа. Т II. Трансцендентные функции. М.: Изд-во физ-мат. литературы. 1963.
2. Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа. Т I. Основные операции анализа. М.: Изд-во физ-мат. литературы. 1963.
3. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматлит, 1962. 1108 с.
4. Де Брейн Н. Г. Асимптотические методы в анализе. М., 1961. 247 с.
5. Евграфов М. А. Аналитические функции. М.: Наука. 1991. 448 с.
6. Федорюк М. В. Метод перевала. М.: Наука. 1977. 352 с.
7. Копсон Э. Асимптотические разложения. М.: Мир. 1966. 156 с.

8. Лаврентьев М. А., Шабат Б. Ф. Методы теории функции комплексного переменного. М.: Наука. 1973. 739 с.
9. Шишкова М. А. Рассмотрение одной системы дифференциальных уравнений с малым параметром при высших производных // Докл.АН СССР. 1973. Т. 209. №3. С. 576–579.
10. Нейштадт А. И. О затягивании потери устойчивости при динамических бифуркациях II // Дифференциальные уравнения. 1988. Т. 24. №2. С. 226–233.
11. Алыбаев К. С., Мусакулова Н. К. Метод линий уровня в теории сингулярно возмущенных уравнений // Вестник Ошского государственного университета. 2022. №4. С. 206–217. https://doi.org/10.52754/16947452_2022_4_206
12. Алыбаев К. С., Нурматова М. Н., Мусакулова Н. К. Методы исследования асимптотики решений сингулярно возмущенных уравнений в комплексных областях // Бюллетень науки и практики. 2024. Т. 10. №3. С. 14-27. <https://doi.org/10.33619/2414-2948/100/01>
13. Алыбаев К. С., Эрматали уулу Б. Функции комплексных переменных с большими параметрами, построение областей // Бюллетень науки и практики. 2024. Т. 10. №10. С. 11-16 <https://doi.org/10.33619/2414-2948/107/01>
14. Алыбаев К. С., Нурматова М. Н. Явление затягивания потери устойчивости в теории сингулярных возмущений // Бюллетень науки и практики. 2023. Т. 9. №12. С. 12-19. <https://doi.org/10.33619/2414-2948/97/01>
15. Alybaev K. S., Dzhuraev A. M., Nurmatova M. Delay in solving autonomous singularly perturbed equations near an unstable equilibrium position // Lobachevskii Journal of Mathematics. V. 45. №3. P. 912–921.
16. Панков П. С., Алыбаев К. С., Тампагаров К. Б., Нарбаев М. Р. Явление погранслоевых линий и асимптотика решений сингулярно возмущенных линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с аналитическими функциями // Вестник ОшГУ. 2013. №1. С. 227-231.
17. Мурзабаева А. Б. Нарушение единственности решений вырожденного уравнения для сингулярно возмущенных уравнений с аналитическими функциями // Информационные технологии и математическое моделирование в науке, технике и образовании. 2016. №3(39). С. 162-169.
18. Нарымбетов Т. К. Анализ исследований сингулярно возмущенных уравнений в комплексных областях // Вестник Ошского государственного университета. 2021. №1(1).
19. Алыбаев К. С., Матанов Ш. М. Геометрическая теория сингулярно возмущенного уравнения бернулли с точкой перевала // Наука. Образование. Техника. 2021. №3(72). С. 40-49. https://doi.org/10.54834/16945220_2021_3_40
20. Нурматова М. Н. Асимптотика решений автономных сингулярно возмущенных уравнений при смене устойчивости положения равновесия в нескольких точках // Бюллетень науки и практики. 2024. Т. 10. №5. С. 40-45. <https://doi.org/10.33619/2414-2948/102/05>
21. Нурматова М. Н. Влияние точек поворота на задержку решения вблизи неустойчивого положения равновесия // Alato Academic Studies. 2024. №2. С. 398-411.
22. Мусакулова Н. К. Структурный анализ решений сингулярно возмущенных уравнений в комплексных областях // Вестник Ошского государственного университета. Математика. Физика. Техника, 2024. №2(5). С. 161–170.
23. Привалов И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного. М.: Наука. 1967. 444 с.

References:

1. Uitteker, E. T., & Watson, Dzh. N. (1963). Kurs sovremennogo analiza. II. Transtsendentnye funktsii. Moscow. (in Russian).
2. Uitteker, E. T., & Watson, Dzh. N. (1963). Kurs sovremennogo analiza. I. Osnovnye operatsii analiza. Moscow. (in Russian).
3. Gradshtein, I. S., & Ryzhik, I. M. (1962). Tablitsy integralov, summ, ryadov i proizvedenii. Moscow. (in Russian).
4. De Brein, N. G. (1961). Asimptoticheskie metody v analize. Moscow. (in Russian).
5. Evgrafov, M. A. (1991). Analiticheskie funktsii. Moscow. (in Russian).
6. Fedoryuk, M. V. (1977). Metod perevala. Moscow. (in Russian).
7. Kopson, E. (1966). Asimptoticheskie razlozheniya. Moscow. (in Russian).
8. Lavrent'ev, M. A., & Shabat, B. F. (1973). Metody teorii funktsii kompleksnogo peremennogo. Moscow. (in Russian).
9. Shishkova, M. A. (1973). Rassmotrenie odnoi sistemy differentsial'nykh uravnenii s malym parametrom pri vysshikh proizvodnykh. *Dokl.AN SSSR*, 209(3), 576–579. (in Russian).
10. Neishtadt, A. I. (1988). O zatyagivanii poteri ustoychivosti pri dinamicheskikh bifurkatsiyakh II. *Differentsial'nye uravneniya*, 24(2), 226–233. (in Russian).
11. Alybaev, K. S., Musakulova, N. K. (2022). Metod linii urovnya v teorii singulyarno vozmushchennykh uravnenii. *Vestnik Oshskogo gosudarstvennogo universiteta*, (4), 206–217. (in Russian). https://doi.org/10.52754/16947452_2022_4_206
12. Alybaev, K., Nurmatova, M., & Musakulova, N. (2024). Methods for Studying Asymptotics of Solutions to Singularly Perturbed Equations in Complex Domains. *Bulletin of Science and Practice*, 10(3), 14-27. (in Russian). <https://doi.org/10.33619/2414-2948/100/01>
13. Alybaev, K. & Ermatali uulu, B. (2024). Functions of a Complex Variable with a Large Parameter and Construction of Regions. *Bulletin of Science and Practice*, 10(10), 11-16. (in Russian). <https://doi.org/10.33619/2414-2948/107/01>
14. Alybaev, K., & Nurmatova, M. (2023). The Phenomenon of Delaying Loss of Stability in the Theory of Singular Perturbations. *Bulletin of Science and Practice*, 9(12), 12-19. (in Russian). <https://doi.org/10.33619/2414-2948/97/01>
15. Alybaev, K. S., Dzhuraev, A. M., & Nurmatova, M. Delay in solving autonomous singularly perturbed equations near an unstable equilibrium position. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 45(3), 912–921. (in Russian).
16. Pankov, P. S., Alybaev, K. S., Tampagarov, K. B., & Narbaev, M. R. (2013). Yavlenie pogransloinykh linii i asimptotika reshenii singulyarno vozmushchennykh lineinykh obyknovennykh differentsial'nykh uravnenii s analiticheskimi funktsiyami. *Vestnik OshGU*, (1), 227-231. (in Russian).
17. Murzabaeva, A. B. (2016). Narushenie edinstvennosti reshenii vyzhdenennogo uravneniya dlya singulyarno vozmushchennykh uravnenii s analiticheskimi funktsiyami. *Informatsionnye tekhnologii i matematicheskoe modelirovanie v nauke, tekhnike i obrazovanii*, (3(39)), 162-169. (in Russian).
18. Narymbetov, T. K. (2021). Analiz issledovaniy singulyarno vozmushchennykh uravnenii v kompleksnykh oblastiakh. *Vestnik Oshskogo gosudarstvennogo universiteta*, (1(1)). (in Russian).
19. Alybaev, K. S., & Matanov, Sh. M. (2021). Geometricheskaya teoriya singulyarno vozmushchennogo uravneniya bernulli s tochkoj perevala. *Nauka. Obrazovanie. Tekhnika*, (3(72)), 40-49. (in Russian). https://doi.org/10.54834/16945220_2021_3_40

20. Nurmatova, M. (2024). Asymptotics of Solutions of Autonomous Singularly Perturbed Equations when the Stability of the Equilibrium Position Changes at Several Points. *Bulletin of Science and Practice*, 10(5), 40-45. (in Russian). <https://doi.org/10.33619/2414-2948/102/05>

21. Nurmatova, M. N. (2024). Vliyaniye tochek povorota na zaderzhku resheniya vblizi neustoichivogo polozheniya ravnovesiya. *Alatoo Academic Studies*, (2), 398-411. (in Russian).

22. Musakulova, N. K. (2024). Strukturnyi analiz reshenii singulyarno vozmushchennykh uravnenii v kompleksnykh oblastiakh. *Vestnik Oshskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika. Fizika. Tekhnika*, (2(5)), 161-170. (in Russian).

23. Privalov, I. I. (1967). Vvedenie v teoriyu funktsii kompleksnogo peremennogo. Moscow. (in Russian).

Работа поступила
в редакцию 29.12.2024 г.

Принята к публикации
12.01.2025 г.

Ссылка для цитирования:

Алыбаев К. С., Нарымбетов Т. К., Матанов Ш. М., Эрматали уулу Б. Сравнительный анализ методов асимптотической оценки интегралов содержащих большой параметр // Бюллетень науки и практики. 2025. Т. 11. №2. С. 19-30. <https://doi.org/10.33619/2414-2948/111/02>

Cite as (APA):

Alybaev, K., Narymbetov, T., Matanov, S., Ermatali uulu, B. (2025). Functions of a Complex Variable with a Large Parameter and Construction of Regions. *Bulletin of Science and Practice*, 11(2), 19-30. (in Russian). <https://doi.org/10.33619/2414-2948/111/02>