УДК 517.928 https://doi.org/10.33619/2414-2948/111/01

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

*©**Аширбаева А. Ж.**, ORCID: 0000-0001-7706-0608, д-р физ.-мат. наук, Ошский технологический университет им. М. М. Адышева, г. Ош, Кыргызская Руспублика, aijarkyn.osh@mail.ru*
*©**Жолдошова Ч. Б.**, ORCID: 0009-0003-1343-0755, Ошский технологический университет имени М.М. Адышева, г. Ош, Кыргызская Руспублика, chebire86@mail.ru*

STUDY OF THE SOLUTION OF ONE NONLINEAR INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION OF FOURTH ORDER

©**Aizharkyn Zh.**, *ORCID: 0000-0001-7706-0608, Dr. habil., Osh Technological University named after M. Adyshev, Osh, Kyrgyzstan, aijarkyn.osh@mail.ru*
©**Zholdoshova Ch.**, *ORCID: 0009-0003-1343-0755, Osh Technological University named after M. Adyshev, Osh, Kyrgyzstan, chebire86@mail.ru*

Аннотация. Рассмотрено нелинейное интегро-дифференциальное уравнение в частных производных четвертого порядка, доказано существование и единственность локального решения, определены условия существования локального решения. Доказательство проводилось с помощью метода дополнительного аргумента. В последнее время этот метод применяется для сведения нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных высокого порядка в интегральные уравнения и системы интегральных уравнений. Этот метод был разработан кыргызскими учеными и использован для решения нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. В настоящее время метод дополнительного аргумента развивается для различных новых классов нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных высших порядков и систем нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Рассмотренное в статье нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных четвертого порядка представлено в операторной форме, причем метод дополнительного аргумента использовался несколько раз подряд. В результате было получено интегральное уравнение и для определения существования и единственности решения интегрального уравнения использован принцип сжимающих отражений. Неизвестная функция в интегральном уравнении содержит дополнительный аргумент, и в результате приравнивания дополнительного аргумента времени можно получить локальное решение исходной начальной задачи. Результаты могут быть использованы при исследовании решения других нелинейных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений высокого порядка.

Abstract. There is considered a nonlinear integro-differential equation in partial derivatives of the fourth order, the existence and uniqueness of a local solution are proved, and the conditions for the existence of a local solution are determined. The proof is carried out using the method of an additional argument. Recently, this method has been used to reduce nonlinear differential equations in partial derivatives of high order into integral equations and systems of integral equations. This method was developed by Kyrgyz scientists and used to solve nonlinear differential equations in partial derivatives of the first order. Currently, the method of the additional argument is being developed for various new classes of nonlinear partial differential equations of higher order and systems of nonlinear partial differential equations. The nonlinear partial differential equation of the fourth order discussed in the article is presented in operator form, with the method of the additional argument applied consecutively several times. As a result, an integral equation is derived, and the existence and uniqueness of the solution to this integral equation are determined using the contraction mapping principle. The unknown function in the integral equation contains an additional argument, and by equating this additional argument to time, a local solution to the original initial value problem can be obtained. The results presented in the article can be applied in the study of solutions to other nonlinear differential and integro-differential equations of higher order.

Ключевые слова: производное, уравнение, решение, локальное.

Keywords: derivative, equation, solution, local.

Исследование решения нелинейных интегро-дифференциальных уравнений высокого порядка представляет теоретический интерес. Например, теоретический интерес представляет определение условий доказательства существования и единственности решения уравнения гиперболического типа четвертого порядка. Рассмотрено нелинейное уравнение четвертого порядка, доказано существование и единственность локального решения, определены условия существования решения. В работе использован метод дополнительного аргумента (МДА) и нелинейное уравнение сведено к системе интегральных уравнений с заданными начальными условиями. Доказательства этим методом существования локального решения уравнений различного порядка приведены работах [1-5].

Используем классы функций $\bar{C}(\Omega)$, $\bar{C}^{(k)}(\Omega)$, $Lip(N|_u, M|_v, ...)$ и дифференциальный оператор $D[\omega] = \frac{\partial}{\partial t} + \omega \frac{\partial}{\partial x}$ введенные в работе [1] и следующее обозначение: $Q_n(T) = \{(t_1, t_2, t_3, .., t_n, x) | \ 0 \le t_1 \le t_2 \le t_3 \le ... \le t_n \le T, \ x \in R\}$, где Т – некоторое заданное положительное число.

Материалы и методы исследования

Для начала рассмотрим интегральное уравнение (ИУ) типа Вольтерра вида:

$$p(\tau, t, x) = x - \int_{\tau}^{t} u(s, p(s, t, x))ds, \tag{1}$$

Для всякой функции $u(t, x) \in \bar{C}^{(4)}(Q_1(T))$ так как $u_x(t, x)$ ограничена справедливо соотношение $u(t, x) \in Lip(L|_x)$.

Для $p(\tau, t, x)$ имеет место равенство:

$$p(\tau, t, p(t, \theta, x)) = p(\tau, \theta, x), \quad (\tau, t, \theta, x) \in Q_3(T). \tag{2}$$

Докажем справедливость соотношения (2), для этого в (1) заменяя x через $p(t, \theta, x)$, имеем:

Т. 11. №2 2025
https://doi.org/10.33619/2414-2948/111

$$p(\tau,t,p(t,\theta,x;u)) = p(t,\theta,x) - \int_{\tau}^{t} u(s,p(s,t,p(t,\theta,x)))ds.$$

$$p(\tau,\theta,x) = x - \int_{\tau}^{\theta} u(s,p(s,\theta,x))ds,$$

Из (1) получаем

Используя обозначение $q(\tau,t,\theta,x) = |p(\tau,t,p(t,\theta,x)) - p(\tau,\theta,x)|$, имеем :

$$|p(\tau,t,p(t,\theta,x)) - p(\tau,\theta,x)| \le \left| x - \int_{t}^{\theta} u(s,p(s,\theta,x))ds - \right.$$

$$\left. - \int_{\tau}^{t} u(s,p(s,t,p(t,\theta,x)))ds - x + \int_{\tau}^{\theta} u(s,p(s,\theta,x))ds \right| \le$$

$$\le \left| - \int_{t}^{\theta} u(s,p(s,\theta,x))ds + \ + \int_{\tau}^{\theta} u(s,p(s,\theta,x))ds - \int_{\tau}^{t} u(s,p(s,t,p(t,\theta,x)))ds \right| \le$$

$$\le \left| \int_{\tau}^{t} u(s,p(s,t,p(t,\theta,x)))ds - \int_{\tau}^{t} u(s,p(s,\theta,x))ds \right| =$$

$$= \left| \int_{\tau}^{t} (u(s,p(s,t,p(t,\theta,x;u))) - u(s,p(s,\theta,x))ds \right| \le$$

$$\le \int_{\tau}^{t} L|p(s,t,p(t,\theta,x)) - p(s,\theta,x)|ds.$$

Следовательно, получаем:

$$q(\tau,t,\theta,x) \le \int_{\tau}^{t} Lq(s,t,\theta,x)ds. \tag{3}$$

Из (3), где t,θ,x играют роль параметров, вытекает тождество $q(\tau,t,\theta,x) \equiv 0$
Мы доказали выполнения тождества (2).
Вводим следующую функцию с дополнительным аргументом, используемую в МДА:
$v(\tau,t,x) = u(\tau,p(\tau,t,x)), \quad v(t,t,x) = u(t,x).$

Тогда из (1) получаем:

$$p(\tau,t,x) = x - \int_{\tau}^{t} v(s,t,x)ds, \tag{4}$$

Если справедливо равенство

$$D[v(t,t,x)]v(\tau,t,x) = 0, \tag{5}$$

то из (4) имеем:

$$D[v(t,t,x)]p(\tau,t,x) = 0 \tag{6}$$

Результаты и обсуждения

Рассматривается нелинейное интегро–дифференциальное уравнение в частных производных вида:

 Т. 11. №2 2025
https://doi.org/10.33619/2414-2948/111

$$D^2[-u(t,x]D^2[u(t,x)]u(t,x)=\int_0^X u(t,s)ds+g(t), \quad (t,x)\in Q_1(T), \quad X,T\text{-}const. \tag{7}$$

Уравнение (7) рассматривается с начальными условиями:

$$\frac{\partial^k u(t,x)}{\partial t^k}\Big|_{t=0}=\psi_k(x), \quad k=0,1,2,3, \tag{8}$$

где $\psi_k(x)\in\overline{C}^{(4)}(R), \quad k=0,1,2,3.$

Теорема. Пусть функции $\psi_k(x)\in\overline{C}^{(4)}(R), \quad k=0,...,3$ удовлетворяют условиям:

$$D[-u(t,x)]D^2[u(t,x)]u(t,x)\big|_{t=0}=0 \;\; D^2[u(t,x)]u(t,x)\big|_{t=0}=0 \tag{9}$$

Тогда задача (1)-(2) имеет единственное решение $u(t,x)\in\overline{C}^{(4)}(G_2(T^*)),$ где T*≤T определяется из данных начальной задачи (1), (2).

Доказательство.

Для доказательства теоремы используем следующие обозначения:

$$z(t,x;u)=D^2[u(t,x)]u(t,x),$$
$$z_1(t,x;u)=D[-u(t,x)]z(t,x;u),$$
$$z_2(t,x;u)=D[-u(t,x)]z_1(t,x;u).$$
$$\theta(t,x;u)=D[u(t,x)]u(t,x).$$

С помощью введенных выше обозначений, запишем уравнение (7) в виде:

$$D^2[-u(t,x)]z(t,x;u)=\int_0^X u(t,s)ds+g(t) \tag{10}$$

$$D[-u(t,x)]z_1(t,x;u)=\int_0^X u(t,s)ds+g(t). \tag{11}$$

Для задач (10), (8) используя МДА с учетом (9) сводим к следующему ИУ:

$$z_1(t,x;u)=\int_0^t\int_0^X u(s,\tau)d\tau ds+\int_0^t g(s)ds \tag{12}$$

В самом деле дифференцируя (12) по t и x, получаем (11). При $t=0$ вытекает равенство $z_1(0,x;u)=0$ – это условие теоремы.

Далее для (12), (8) используем МДА. Последовательное использование МДА представлено в работах [1]. Получаем ИУ вида:

$$z(t,x;u)=\int_0^t(t-s)\int_0^X u(s,\tau)d\tau ds+\int_0^t(t-s)g(s)ds \tag{13}$$

Мы получили (13), применяя последовательно МДА к уравнению (7). Обратно с помощью дифференциального оператора $D[\omega]$ получаем (7) и условие (9) теоремы выполнено. Воспользуемся МДА еще два раза подряд, чтобы привести данную задачу к системе ИУ. Используя введенные выше обозначения, последнее уравнение (12) можно записать следующим образом:

$$D[u(t,x)]\theta(t,x;u)=\int_0^t(t-s)\int_0^X u(s,\tau)d\tau ds+\int_0^t(t-s)g(s)ds=I(t;u) \tag{14}$$

Из (14) имеем:

$$\theta(t,x;u)=\varphi(p(0,t,x))+\int_0^t I(\rho;u)d\rho \tag{15}$$

$\theta(t,x;u)\big|_{t=0}=\varphi(x),$ здесь функция $p(s,t,x)$ определяется из ИУ (1) и для которой выполняются (2), (6). Для (15) справедливо:

$D[u(t,x)]\theta(t,x;u)=\varphi'(p(0,t,x))D[u(t,x)]p(0,t,x)+I(t;u)$.

Следовательно, в силу (6) получаем справведливость (14) и $\theta(0,x;u)=\varphi(x).$

Теперь рассмотрим решение задачи (15), (8). Применяем МДА:

$$u(t,x)=\psi_0(p(0,t,x))+t\varphi(p(0,t,x))+\int_0^t(t-\rho)I(\rho;u)d\rho \tag{16}$$

Применяя дифференциальный оператор $D[\omega]$ для (16), как и в предыдущих случаях, получим (15) и $u(0,x)=\psi_0(x)$.

В результате мы свели поставленную задачу к системе ИУ (16), (1). Мы доказали их эквивалентность. Эквивалентность этих задач доказывается четырехкратным применением МДА к исходной задаче (7), (8) с условием (9) и наоборот с использованием дифференциального оператора $D[\omega]$ для систем ИУ (16), (1). Нам достаточно проверить существование единственного решения задачи (16), (1).

Преобразуя (16) и используя принцип сжимающих отражений (ПСО), докажем существование единственного локального решения (16), (1).

В (16) сделаем замены t на s, x на p(s,t,x), принимая во внимание (2) получаем:

$$u(s,p(s,t,x))=\psi_0(p(0,t,x))+s\varphi(p(0,t,x))+\int_0^s(s-\rho)I(\rho;u)d\rho \tag{17}$$

Из (17) учитывая (1), имеем:

$$\nu(s,t,x)=\psi_0(x-\int_0^t\nu(\tau,t,x))d\tau)+s\varphi(x-\int_0^t\nu(\tau,t,x))d\tau)+\int_0^s(s-\rho)I(\rho;u)d\rho, \tag{18}$$

$$\nu(s,t,x)=u(s,p(s,t,x)),\quad (s,t,x)\in Q_1(T).$$

В результате мы свели задачу к ИУ (18).

Следовательно, мы видели, что достаточно доказать существование и единственность решения $\nu(s,t,x)$ последнего ИУ (18), так как $u(t,x)=\nu(t,t,x)$.

Для (18) используем ПСО. Пусть:

$$\nu(\tau,t,x)=J(\tau,t;\nu), \tag{19}$$

Т. 11. №2 2025
https://doi.org/10.33619/2414-2948/111

$$J(\tau,t;\nu)=\psi_0(x-\int_0^t\nu(\tau,t,x))d\tau)+\tau\varphi(x-\int_0^t\nu(\tau,t,x))d\tau)+\int_0^s(s-\rho)I(\rho;u)d\rho,.$$

$$I(\rho;u)=\int_0^\rho(\rho-s)\int_0^X\nu(s,s,\tau)d\tau ds+\int_0^\rho(\rho-s)g(s)ds.$$

Покажем, что уравнение (19) имеет в области $Q_1(T)$ при $T*<T$ единственное, непрерывное решение, удовлетворяющее неравенству $\|\nu\|\leq M$.

При $T^*<T$ получаем оценки:

$$\left|J(\tau,t;\nu)\right|=\left|\psi_0(p(0,t,x))+\tau\varphi(p(0,t,x))\right|+\int_0^s(s-\rho)\left|\int_0^\rho(\rho-s)\int_0^X\nu(s,s,\tau)d\tau ds+\int_0^\rho(\rho-s)g(s)ds\right|d\rho\leq$$

$$\leq\left|\psi_0\right|+t\left|\varphi\right|+MX\frac{t^3}{3!}+\|g\|\frac{t^2}{2}\leq\Omega_0(T*),$$

где

$$\Omega_0(S)=\|\psi_0\|+\|\varphi\|S+MX\frac{S^3}{3!}+\|g\|\frac{S^2}{2}.$$

$$\left|J(\tau,t;\nu_1)-J(\tau,t;\nu_2)\right|\leq T*\Omega_1\|\nu_1-\nu_2\|_{Q_2(T*)},$$

где

$$\Omega_1=\|\psi_0'\|+\|\varphi'\|T+\frac{T^3}{2!}.$$

Заключение

Таким образом, мы доказали: уравнение (18) имеет единственное решение и норма не превосходит 2Ω0(T*). Кроме того, для решения уравнения (18), основанного на ПСО, имеются непрерывные частные производные до четвертого порядка по всем аргументом. Теорема доказана.

Список литературы:

1. Аширбаева А. Ж. Решение нелинейных дифференциальных и интегродифференциальных уравнений в частных производных высокого порядка методом дополнительного аргумента: Автореф. дисс. … д-р физ.–мат. наук. Бищкек, 2012. 34 с.

2. Аширбаева А. Ж., Мамазиаева Э. А. Решение нелинейного операторно-дифференциального уравнения в частных производных второго порядка методом дополнительного аргумента // Вестник КРСУ. 2015. Т. 15. №5. С. 61–64.

3. Иманалиев М. И., Панков П. С., Иманалиев Т. М. К теории нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных типа Кортевега-де Фриза // Доклады Российской АН. 1995. Т. 342. №1. С.17–19.

4. Иманалиев М. И., Панков П. С., Иманалиев Т. М. Метод дополнительного аргумента в теории нелиней-ных волновых уравнений в частных производных // Доклады Российской АН. 1995. Т. 343. №5. С. 596–598.

5. Аширбаева А. Ж., Мамазиаева Э. А. Решение нелинейного дифференциального уравнения в частных производных второго порядка со многими переменными методом дополнительного аргумента // Проблемы современной науки и образования. 2016. №14 (56). С. 10-16.

References:

1. Ashirbaeva, A. Zh. (2012). Reshenie nelineinykh differentsial'nykh i integrodifferentsial'nykh uravnenii v chastnykh proizvodnykh vysokogo poryadka metodom dopolnitel'nogo argumenta: Avtoref. disc. … d-r fiz.–mat. nauk. Bishchkek. (in Russian).

2. Ashirbaeva, A. Zh., & Mamaziaeva, E. A. (2015). Reshenie nelineinogo operatorno-differentsial'nogo uravneniya v chastnykh proizvodnykh vtorogo poryadka metodom dopolnitel'nogo argument. *Vestnik KRSU, 15*(5), 61–64. (in Russian).

3. Imanaliev, M. I., Pankov, P. S., & Imanaliev, T. M. (1995). K teorii nelineinykh differentsial'nykh uravnenii v chastnykh proizvodnykh tipa Kortevega-de Friza. *Doklady Rossiiskoi AN, 342*(1), 17–19. (in Russian).

4. Imanaliev, M. I., Pankov, P. S., & Imanaliev, T. M. (1995). Metod dopolnitel'nogo argumenta v teorii nelinei-nykh volnovykh uravnenii v chastnykh proizvodnykh. *Doklady Rossiiskoi AN, 343*(5), 596–598. (in Russian).

5. Ashirbaeva, A. Zh., & Mamaziaeva, E. A. (2016). Reshenie nelineinogo differentsial'nogo uravneniya v chastnykh proizvodnykh vtorogo poryadka so mnogimi peremennymi metodom dopolnitel'nogo argument. *Problemy sovremennoi nauki i obrazovaniya,* (14 (56)), 10-16. (in Russian).

Работа поступила в редакцию 26.12.2024 г.

Принята к публикации 09.01.2025 г.

Ссылка для цитирования:

Аширбаева А. Ж., Жолдошова Ч. Б. Исследование решения одного нелинейного интегро-дифференциального уравнения четвертого порядка // Бюллетень науки и практики. 2025. Т. 11. №2. С. 12-18. https://doi.org/10.33619/2414-2948/111/01

Cite as (APA):

Aizharkyn, Zh., & Zholdoshova, Ch. (2025). Study of the Solution of one Nonlinear Integro-differential Equation of Fourth Order. *Bulletin of Science and Practice, 11*(2), 12-18. (in Russian). https://doi.org/10.33619/2414-2948/111/01