УДК 517.928 https://doi.org/10.33619/2414-2948/110/01

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕШЕНИЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ УРАВНЕНИЙ РАСЩЕПЛЕНИЕМ И ЗАМЕНОЙ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ НА ПЕРЕМЕННЫЕ НАЧАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ

*©**Алыбаев К. С.**, ORCID: 0000-0002-7962-534X, SPIN-код: 2396-5503, д-р физ.-мат. наук, Джалал-Абадский государственный университет им. Б. Осмонова, г. Джалал-Абад, Кыргызстан, alybaevkurmanbek@rambler.ru*
*©**Мусакулова Н. К.,** ORCID: 0009-0002-8805-331X, SPIN-код: 4710-0522, Жалал-Абадский государственный университет им. Б. Осмонова, г. Жалал-Абад, Кыргызстан, kuralbekovna79@inbox.ru*

STUDY OF SOLUTIONS OF SINGULARLY PERTURBED EQUATIONS BY SPLITTING AND REPLACING INITIAL CONDITIONS WITH VARYING INITIAL CONDITIONS

*©**Alybaev K.**, ORCID: 0000-0002-7962-534X, SPIN-code: 2396-5503, Dr. habil., Jalal-Abad State University named after B. Osmonov, Jalal-Abad, Kyrgyzstan, alybaevkurmanbek@rambler.ru*
*©**Musakulova N.,** ORCID: 0009-0002-8805-331X, SPIN code: 4710-0522, Jalal-Abad State University named after B. Osmonov, Jalal-Abad, Kyrgyzstan, kuralbekovna79@inbox.ru*

Аннотация. Рассматривается сингулярно возмущенное уравнение (СВУ) первого порядка. Основная задача заключается в расщеплении решения заданного уравнения на несколько (конечных) составляющих, так чтобы каждая составляющая была доминирующей в разных частях рассматриваемой комплексной области и упростила проводимые исследования. Для облегчения проводимых исследований проведена замена начальных условий на переменные начальные условия на некоторых линиях.

Abstract. In this paper, a singularly perturbed equation (SPE) of the first order is considered. The main task is to split the solution of the given equation into several (finite) components, so that each component is dominant in different parts of the considered complex region and simplifies the conducted research. To facilitate the conducted research, the initial conditions are replaced by variable initial conditions on some lines.

Ключевые слова: сингулярно возмущенные уравнения, расщепление решений, аналитичские функции, гармонические функции, асимптотические оценки.

Keywords: singularly perturbed equations, splitting of solutions, analytic functions, harmonic functions, asymptotic estimates.

В ранних работах [1-4] были исследованы асимптотическое поведение решений СВУ в комплексных областях. При этом было выявлено, что решения рассматриваемых СВУ в разных частях комплексных областей ведёт себя по-разному. Вследствие этого были введены понятия погранслойная линия, погранслойные области сингулярные, регулярные области, области притяжения. Возникла задача, можно ли произвести расщепление решений СВУ на несколько составляющих, так чтобы каждая из них определяли введеные понятия. Впервые эта задача решена в [5, 6]. Решения рассматриваемых СВУ расщеплены на несколько составляющих, а также рассмотрены случаи, когда невозмущенное уравнение имеет регулярное и иррегулярное решения. Исследование проведено заменой дифференциальных уравнений интегральными. Решения интегральных уравнений исследованы выбором определенных путей интегрирования. При этом были проведены громоздкие вычисления и оценки решений на нескольких путях интегрирования.

Основная цель настоящей работы, привести интегральные уравнения к более удобному для оценки виду, заменой начального условия, на переменные начальные условия, на некоторых линиях.

Постановка задачи

Пусть рассматривается уравнение

$$\varepsilon x'(t,\varepsilon)=a(t)x(t,\varepsilon)+\varepsilon(b(t)+f(t,x(t,\varepsilon)) \tag{1}$$

с начальным условием

$$x(t_0,\varepsilon)=x^0, \tag{2}$$

0<ε- где малый вещественный параметр; x(t,ε) – неизвестная скалярная функция; t∈D⊂C- множество комплексных чисел, а D - некоторая ограниченная область.

Уравнения вида (1) называются сингулярно возмущенными уравнениями (СВУ). В (1) пологая ε=0 получим невозмущенное уравнение (НУ). В данном случае НУ имеет нулевое решение.

Пусть выполняются условия:

У1. $a(t), b(t) \in Q(D) -$ пространство аналитических функций в D;

У2. $\forall t \in D\ (a(t) \neq 0)$;

У3. $f(t,x) \in Q(H), H=\{(t,x), t\in D, |x|\leq c_1\}, f(t,0)\equiv 0$;

Буквами $c_1, c_2, \ldots$ будем обозначать положительных постоянных, не звисящих от ε.

У4. $\forall\left((t,\tilde{x}),(t,\tilde{\tilde{x}})\right)\in H\left(\left|f(t,\tilde{x})-f\left(t,\tilde{\tilde{x}}\right)\right|\leq c_2\left|\tilde{x}-\tilde{\tilde{x}}\right|\right)$.

Решение задачи.

1. Расщепление решения.

Для реализации цели в (1) — заменим неизвестную функцию

$$x(t,\varepsilon)=y(t,\varepsilon)+\Pi(t,\varepsilon), \tag{3}$$

где y(t,ε),Π(t,ε)- новые неизвестные функции.

(3) подставляя в (1) получим

$$\varepsilon\Pi'(t,\varepsilon)=a(t)\Pi(t,\varepsilon)+\varepsilon f(t,\Pi(t,\varepsilon)), \tag{4}$$

$$\Pi(t_0,\varepsilon)=x^0; \tag{5}$$

$$\varepsilon y'(t,\varepsilon)=a(t)y(t,\varepsilon)+\varepsilon\left[b(t)+\left(f\left(t,y(t,\varepsilon)+\Pi(t,\varepsilon)\right)-f\left(t,\Pi(t,\varepsilon)\right)\right)\right] \tag{6}$$

$$(t_0,\varepsilon)=0 \tag{7}$$

Таким образом проведено расщепление решения на два составляющие. (4) – (5) и (6) – (7) заменим следующими интегральными уравнениями (далее аргументы неизвестной функции будем опускать)

$$\Pi = x^0 exp\frac{A(t)}{\varepsilon} + \int_{t_0}^{t} f(\tau,\Pi)exp\frac{A(t)-A(\tau)}{\varepsilon}d\tau, \tag{8}$$

$$y = \int_{t_0}^{t}\big(b(\tau) + (f(\tau, y+\Pi) - f(\tau,\Pi))\big)exp\frac{A(t)-A(\tau)}{\varepsilon}d\tau, \tag{9}$$

где $A(t) = \int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau.$

2. Геометрические построения

При построениях используем метод изложенный в [1]. Проведем геометрические построения в области D, с использованием линии уровня функций ReA(t),ImA(t).

Определение. Множества

$$(p) = \{t \in D, ReA(t) = p - const\},$$
$$(q) = \{t \in D,\ \ ImA(t) = q - const\}$$

назовём, соответственно линиями уровня функций $ReA(t), ImA(t)$. Функции $ReA(t)$ и $ImA(t)$ сопряженно – гармонические, согласно У1, а их линии уровня – аналитические кривые [7-8]. Из множества $\{(p)\}, \{(q)\}$ возьмём линии уровня

$$(p_0) = \{t \in D, ReA(t) = 0\},$$
$$(q_0) = \{t \in D,\ \ ImA(t) = 0\}.$$

Согласно У2 линии уровня $(p), (q)$ не имеют точек ветвления. Линии (p_0), (q_0) пересекаются в точке t_0 и взамно ортогональны в точке пересечения [8].

Линия (p_0) разделяет некоторую окрестность точки t_0 на две части. Не ограничивая общности будем считать, что эта окрестность, область D (Рисунок 1).

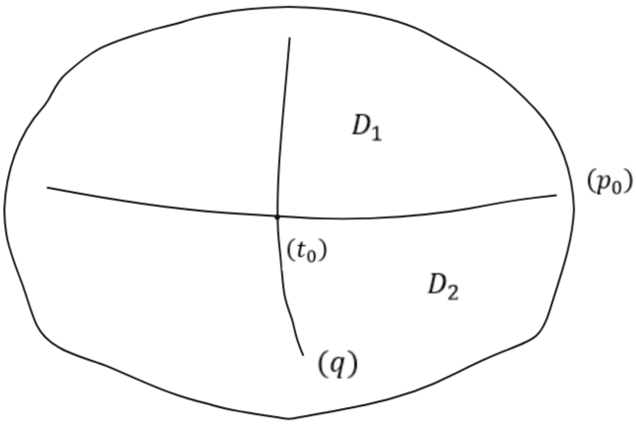

Рисунок 1. Деление области

Части обозначим D_1, D_2. Функцию $ReA(t)$ рассмотрим на линии (q). Известно [8], она строго монотонна вдоль линии (q), которая пересекается с (p_0). Точку пересечения обозначим $\tilde{t}$.

$$\forall t \in (p_0)\ (ReA(t) = 0) \Rightarrow ReA(\tilde{t}) = 0.$$

Тогда $\forall t \in D_1\ (ReA(t) \le 0\ \vee ReA(t) \ge 0)$, причем равенство имеет место только для $\forall t \in (p_0)$. Для определенности будем считать

$$\forall t \in D_1\ ReA(t) \le 0.. \tag{10}$$

Если так, то

$$\forall t \in D_2 \; ReA(t) \geq 0. \tag{11}$$

Введём линии уровня

(p_(-ε))={t∈D,ReA(t)= εlnε},

(p_ε)={t∈D,   ImA(t)=-εlnε}.

Линиями $(p_{-\varepsilon}),(p_\varepsilon)$ области D_1, D_2 также разделяются на части $D_{1\varepsilon}, D_{11}, D_{2\varepsilon}, D_{21}$ (Рисунок 2).

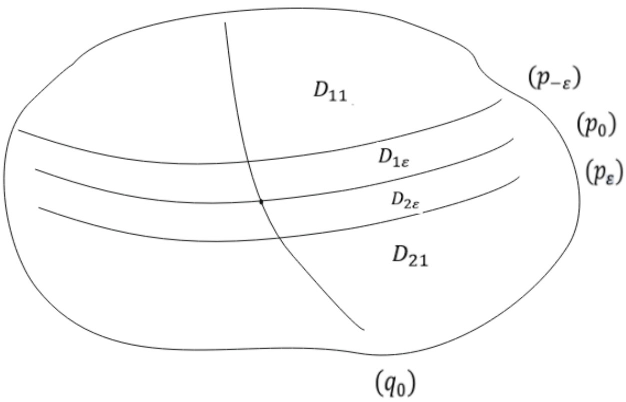

Рисунок 2. Области D_1, D_2

(8) – (9) будем рассматривать в областях $D_{1\varepsilon}, D_{11}, D_{2\varepsilon}, D_{21}$. Определим пути интегрирования.

Существуют бесконечное множество путей интегрирования. Остановимся только на одном варианте. Для $t \in D_1$ или D_2, путь состоит из: $(p_0)[t_0, \tilde{t}] \cup (q)[\tilde{t}, t]$ (Рисунок 3). Запись $l[\tilde{t}, \tilde{\tilde{t}}]$, означает часть кривой l, соединяющая точки $\tilde{t}$ и $\tilde{\tilde{t}}$.

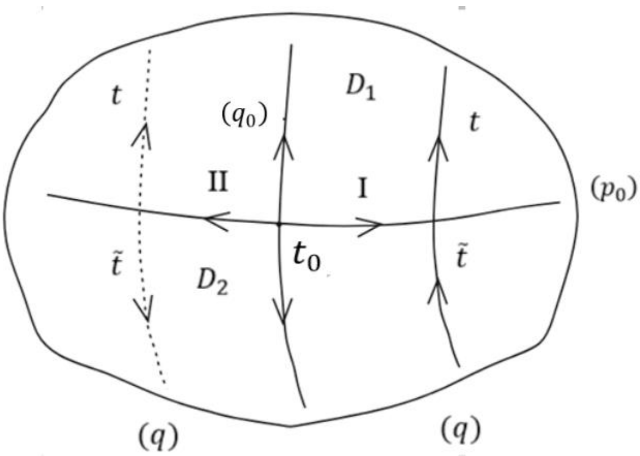

Рисунок 3. Пути интегрирования для (I) и (II).

3. Исследование асимптотического поведения решений заменой начальных условий на переменные.

Исследование асимптотического поведения решений (8)-(9) проведем методом последовательных приближений, которые определим следующим образом

Т. 11. №1 2025
https://doi.org/10.33619/2414-2948/110

$$\Pi_m = x^0 exp\frac{A(t)}{\varepsilon} + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \Pi_{m-1}) exp\frac{A(t)-A(\tau)}{\varepsilon} d\tau, \tag{12}$$
$$\Pi_0 \equiv 0,\ m = 1,2, \dots;$$

$$y_m = \int_{t_0}^{t} \big(b(\tau) + (f(\tau, y_{m-1} + \Pi) - f(\tau, \Pi))\big) exp\frac{A(t)-A(\tau)}{\varepsilon} d\tau, \tag{13}$$
$$y_0 \equiv 0,\ m = 1,2, \dots;$$

Сначала проведем оценку и докажем равномерную сходимость (12), затем рассмотрим (13). Ограничимся рассмотрением варианта I, так как вариант II исследуется аналогично. Сначала рассмотрим (12) для $\forall t \in (p_0)$.

Уравнение (p_0) представим в виде

$\tau_1 = \tau_1(s), \tau_2 = \tau_2(s)$, где s длина (p_0) от t_0 до t , $0 \le s < s_0 < +\infty$, причем $\tau_1(s), \tau_2(s)$ являются аналитическими функциями.

С учетом уравнения (p_0), (12) представим в виде

$$\Pi_m = x^0 exp\frac{A(t)}{\varepsilon} + \int_{0}^{s} f(\tau(\tilde{s}), \Pi_{m-1}) exp\frac{A\big(t(s)\big)-A\big(\tau(\tilde{s})\big)}{\varepsilon} \times \tag{14}$$
$$\times \big(\tau_1'(\tilde{s}) + i\tau_2'(\tilde{s})\big) d\tau_1'(\tilde{s}).$$

Первое приближение определяется так

$$\Pi_1 = x^0 exp\frac{A(t)}{\varepsilon} \quad \text{и} \quad |\Pi_1| = |x^0|.$$

Для последующих приближений справедлива оценка

$$\Pi_m \le |x^0| \left(1 + c_3\, s + \dots + \frac{(c_3 s)^{m-1}}{(m-1)!}\right) \le |x^0| exp c_3 s. \tag{15}$$

Для справедливости проводимых операций должно быть $|x^0| exp c_3 s \le c_1$.

Отсюда получаем ограничение на s

$$s \le \frac{1}{c_3} ln \frac{c_1}{|x^0|}. \tag{16}$$

Чтобы доказать сходимость (14), достаточно оценить

$$|\Pi_m - \Pi_{m-1}|\ (m = 1,2, \dots).$$

Справедлива оценка

$$|\Pi_m - \Pi_{m-1}| \le |x^0| \frac{(c_3 s)^{m-1}}{(m-1)!},\ m = 1,2, \dots , \tag{17}$$

Из (17) следует равномерная сходимость (14), для $\forall t \in (p_0)$ с ограничением (16), к некоторой функции $\Pi(t, \varepsilon)$, которая является решением (14). Если учесть (15)-(16), для этого решения справедлива оценка

$$\Pi(t, \varepsilon) \le |x^0| exp c_3 s \le c_1, \forall t \in (p_0). \tag{18}$$

Пусть $t \in D_1$ и $t \notin (p_0)$. Согласно выбранного пути интегрирования, (8) представим в виде

$$\Pi = x^0 exp\frac{A(t)}{\varepsilon} + \int_{t_0}^{\tilde{t}} f(\tau,\Pi)\, exp\frac{A(t)-A(\tau)}{\varepsilon}d\tau + \ (\text{по } (p_0))\ + \int_{\tilde{t}}^{t} f(\tau,\Pi)\, exp\frac{A(t)-A(\tau)}{\varepsilon}d\tau. \tag{19}$$

В (18) проведем следующее преобразование

$$\Pi = exp\frac{A(t)-A(\tilde{t})}{\varepsilon}\left[x^0 exp\frac{A(\tilde{t})}{\varepsilon} + \int_{t_0}^{\tilde{t}} f(\tau,\Pi)\, exp\frac{A(\tilde{t})-A(\tau)}{\varepsilon}d\tau\right] + \tag{20}$$

$$(\text{по } (p_0)) + \int_{\tilde{t}}^{t} f(\tau,\Pi)\, exp\frac{A(t)-A(\tau)}{\varepsilon}d\tau. \quad (\text{по } (q))$$

В (20), выражение содержащееся в скобке [...], дает решение (8) на (p_0) с ограничением (16) и оценкой (18).

Таким образом, (20) можно переписать в виде

$$\Pi = \Pi(\tilde{t},\varepsilon) exp\frac{A(t)-A(\tilde{t})}{\varepsilon} + \int_{\tilde{t}}^{t} f(\tau,\Pi)\, exp\frac{A(t)-A(\tau)}{\varepsilon}d\tau. \tag{21}$$

Уравнение (8) преобразовано в уравнение (21) с начальным условием на линии (p_0), причем начальное значение $\tilde{t}$ меняется в пределах ограничений (16). Таким образом проведено замена исходного начального условия на переменные начальные условия на линии уровня. Как и в предыдущем случае к (21) применим метод последовательных приближений, которые определяются аналогично (12).

Для последоовательных приближений справедлива оценка

$$|\Pi_m| \le |\Pi(\tilde{t},\varepsilon)| exp\frac{ReA(t)}{\varepsilon}\left(1 + c_3\sigma + \cdots + \frac{(c_3\sigma)^{m-1}}{(m-1)!}\right) \le |\Pi(\tilde{t},\varepsilon)| exp\frac{ReA(t)+\varepsilon\sigma c_3}{\varepsilon}. \tag{22}$$

При получении оценки (22), уравнение (q) представляется в виде $\tau_1 = \tau_1(\sigma), \tau_2 = \tau_2(\sigma)$, $\sigma -$ длина (q) от $\tilde{t}$ до t и $0 \le \sigma \le \sigma_0$. В (22) ограничений на σ не ставится.

Имеем оценку

$$|\Pi_m - \Pi_{m-1}| \le |\Pi(\tilde{t},\varepsilon)| \frac{(c_3\sigma)^{m-1}}{(m-1)!} exp\frac{ReA(t)}{\varepsilon}, \qquad m = 1,2,\dots\ .$$

Отсюда следует равномерная сходимость $\{\Pi_m(t,\varepsilon)\}$ к некоторой функции $\Pi(t,\varepsilon)$ и эта функция, решение (21). Усли учесть (22), то справедлива оценка

$$.\ |\Pi(t,\varepsilon)| \le |\Pi(\tilde{t},\varepsilon)| exp\frac{ReA(t)+\varepsilon\sigma c_3}{\varepsilon} \tag{23}$$

Из ограничения (16) вытекает существование области $D_1^0 \subset D_1$ и оценки (18), (23) верны для D_1^0. D_1^0 содержит части D_{11} и $D_{1\varepsilon}$, которые обозначим $D_{11}^0, D_{1\varepsilon}^0$.

Тогда $D_1^0 = D_{1\varepsilon}^0 \cup D_{11}^0$.

Из (18), (22) вытекает справедливость следующей оценки

$$|\Pi(t,\varepsilon)| \le c_4\begin{cases}1, & t \in (p_0) \cup D_{1\varepsilon}^0;\\ & \varepsilon^n, t \in D_{11}^0.\end{cases} \tag{24}$$

Далее можно рассмотреть случай $t \in D_{2\varepsilon}^0$ и D_{21}^0 части D_2, ограниченные условием (16). Если $t \in D_{2\varepsilon}^0$, то для для решения (21) имеет место оценка

$$|\Pi(t,\varepsilon)| \le c_4.$$

Пусть $t \in D_{21}^0$. Предположим

$$|\Pi(t,\varepsilon)| \leq c_4 \leq c_1 \, . \tag{25}$$

Тогда, из (21) имеем (в этом случае уравнение (q) также представим параметрически)

$$|\Pi(t,\varepsilon)| \geq exp\frac{ReA(t)}{\varepsilon}\left[\left||\Pi(\tilde{t},\varepsilon)| - c_3\left|\int_0^\tau |\Pi| exp\frac{-ReA(\tau(c))}{\varepsilon}\right|\right|\right]. \tag{26}$$

В (26)$(-ReA(\tau(c)) < 0)$. Следовательно выражение содержащееся в скобке ограничена. Так как $ReA(t) \gg 0$, тогда

$$|\Pi(t,\varepsilon)| \to \infty \text{ при } \varepsilon \to 0.$$

Мы пришли к противоречию , отсюда вытекает $\Pi(t,\varepsilon)$ $-$неограничена для $t \in D_{21}^0$.

На основе проведенных оценок можем утверждать, что уравнение (8) определяет пограничные линии и пограничные области [2].

Аналогично проводится исследование уравнения (9). Во избежание повторений, напишем окончательный результат

$$|y(t,\varepsilon)| \leq c_3\varepsilon, t \in (p_0) \cup D_{1\varepsilon}^0 \cup D_{11}^0 \cup D_{2\varepsilon}^0,$$
$$|y(t,\varepsilon)| \text{ −неограничена для } t \in D_{21}^0.$$

При оценке $y(t,\varepsilon)$, ограничение (16) снимается. $y(t,\varepsilon)$ определяет область притяжения (ОП) решения (1)-(2) к решению невозмущенного уравнения [3].

Вывод

Проведено расщепление решения задачи (1)-(2) на две составляющие и одна из них определяет пограничные линии и пограничные области, а другая ОП. Для облегчения проводимых исследований, начальная задача заменена на задачу с переменными начальными условиями на линиях уровня гармонических функций. Есть основания считать, такие замены присущи для уравнений, рассматриваемых в комплексных областях.

Список литературы:

1. Алыбаев К. С. Метод линий уровня исследования сингулярно возмущенных уравнений при нарушении условия устойчивости // Вестник КГНУ. Серия. 2001. Т. 3. С. 190-200.

2. Панков П. С., Алыбаев К. С., Тампагаров К. Б., Нарбаев М. Р. Явление погранслойных линий и асимптотика решений сингулярно возмущенных линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с аналитическими функциями // Вестник ОшГУ. 2013. №1. С. 227-231.

3. Нарымбетов Т. К. Существование общих областей притяжения решений сингулярно возмущенных уравнений // Вестник Жалал-Абадского государственного университета. 2021. №1(46). С. 9-13.

4. Нурматова М. Н. Асимптотика решений автономных сингулярно возмущенных уравнений при смене устойчивости положения равновесия в нескольких точках // Бюллетень науки и практики. 2024. Т. 10. №5. С. 40-45. https://doi.org/10.33619/2414-2948/102/05

5. Алыбаев К. С., Мусакулова Н. К. Расщепление решений иррегулярно вырожденных линейных сингулярно возмущенных уравнений в комплексных областях // Наука. Образование. Техника. 2022. №3. С. 22-31. https://doi.org/10.54834/16945220_2022_3_22

6. Мусакулова Н. К. Расширение областей притяжений решений сингулярно возмущенных уравнений // Бюллетень науки и практики. 2024. Т. 10. №7. С. 12-20. https://doi.org/10.33619/2414-2948/104/01

7. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного. М.: Наука, 1973. 736 с.

8. Федорюк М. В. Метод перевала. М.: Наука, 1977. 368 с.

References:

1. Alybaev, K. S. (2001). Metod linii urovnya issledovaniya singulyarno vozmushchennykh uravnenii pri narushenii usloviya ustoichivosti. *Vestnik KGNU. Seriya, 3,* 190-200. (in Russian).

2. Pankov, P. S., Alybaev, K. S., Tampagarov, K. B., & Narbaev, M. R. (2013). Yavlenie pogransloinykh linii i asimptotika reshenii singulyarno vozmushchennykh lineinykh obyknovennykh differentsial'nykh uravnenii s analiticheskimi funktsiyami. *Vestnik OshGU,* (1), 227-231. (in Russian).

3. Narymbetov, T. K. (2021). Sushchestvovanie obshchikh oblastei prityazheniya reshenii singulyarno vozmushchennykh uravnenii. *Vestnik Zhalal-Abadskogo gosudarstvennogo universiteta, 1*(46), 9-13. (in Russian).

4. Nurmatova, M. (2024). Asymptotics of Solutions of Autonomous Singularly Perturbed Equations when the Stability of the Equilibrium Position Changes at Several Points. *Bulletin of Science and Practice, 10*(5), 40-45. (in Russian). https://doi.org/10.33619/2414-2948/102/05

5. Alybaev, K. S., & Musakulova, N. K. (2022). Rasshcheplenie reshenii irregulyarno vyrozhdennykh lineinykh singulyarno vozmushchennykh uravnenii v kompleksnykh oblastyakh. *Nauka. Obrazovanie. Tekhnika,* (3), 22-31. (in Russian). https://doi.org/10.54834/16945220_2022_3_22

6. Musakulova, N. (2024). Expanding the Areas of Attraction of Solutions to Singularly Perturbed Equations. *Bulletin of Science and Practice, 10*(7), 12-20. (in Russian). https://doi.org/10.33619/2414-2948/104/01

5. Lavrent'ev, M. A., & Shabat, B. V. (1973). Metody teorii funktsii kompleksnogo. Moscow. (in Russian).

6. Fedoryuk, M. V. (1977). Metod perevala. Moscow. (in Russian).

Работа поступила в редакцию 02.12.2024 г.

Принята к публикации 12.12.2024 г.

Ссылка для цитирования:

Алыбаев К. С., Мусакулова Н. К. Исследование решений сингулярно возмущенных уравнений расщеплением и заменой начальных условий на переменные начальные условия // Бюллетень науки и практики. 2025. Т. 11. №1. С. 10-17. https://doi.org/10.33619/2414-2948/110/01

Cite as (APA):

Alybaev, K., & Musakulova, N. (2025). Study of Solutions of Singularly Perturbed Equations by Splitting and Replacing Initial Conditions with Varying Initial Conditions. *Bulletin of Science and Practice, 11*(1), 10-17. (in Russian). https://doi.org/10.33619/2414-2948/110/01