УДК 517.956 https://doi.org/10.33619/2414-2948/109/01

ЗАДАЧИ СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ ПСЕВДО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

©Пирматов А. З., *ORCID: 0009-0008-2343-5185, SPIN-код: 8965-9182, канд. физ.-мат. наук, Ошский государственный университет, г. Ош, Кыргызстан, pirmatov@oshsu.kg*
©Исаков Т. Э., *ORCID: 0009-0007-2968-5396, SPIN-код: 8282-3951, канд. пед. наук, Кыргызско-Узбекский международный университет им. Б. Сыдыкова, г. Ош, Кыргызстан, t_isakov57@mail.ru*
©Сактанов У. А., *ORCID: 0009-0004-3248-3630, SPIN-код: 1114-1664, канд. физ.-мат. наук, Ошский государственный университет, г. Ош, Кыргызстан, usaktanov@oshsu.kg*

CONJUNCTION PROBLEMS FOR A PSEUDO-HYPERBOLIC EQUATION OF THE FOURTH ORDER WITH DISCONTINUOUS COEFFICIENTS

©Pirmatov A., *ORCID: 0009-0008-2343-5185, SPIN-code: 8965-9182, Ph.D., Osh State University, Osh, Kyrgyzstan, pirmatov@oshsu.kg*
©Isakov T., *ORCID: 0009-0007-2968-5396, SPIN-код: 8282-3951, Ph.D., Kyrgyz-Uzbek International University named after B. Sydykov Osh, Kyrgyzstan, t_isakov57@mail.ru*
©Saktanov U., *ORCID: 0009-0004-3248-3630, SPIN-code: 1114-1664, Ph.D., Osh State University,Osh, Kyrgyzstan, usaktanov@oshsu.kg*

Аннотация. Актуальность работы обусловлена доказательством корректности задачи сопряжения для псевдо-гиперболического уравнения четвертого порядка с разрывными коэффициентами. В данной работе использованы методы функции Грина и интегральных уравнений, с помощью которых доказана существования и единственность решения первой краевой задачи для псевдо-гиперболического уравнения четвертого порядка в частных производных. Полученные результаты можно применять в обучении студентов и магистрантов математических специальностей.

Abstract. The relevance of the study is justified by proving the correctness of the conjugation problem for a pseudo-hyperbolic fourth-order equation with discontinuous coefficients. In this work, the methods of Green's function and integral equations are employed to demonstrate the existence and uniqueness of solutions for the first boundary value problem of the pseudo-hyperbolic fourth-order partial differential equation. The obtained results can be applied in the education of students and graduate students in mathematical disciplines.

Ключевые слова: краевые задачи, существование, единственность, функция Грина, псевдо-гиперболическое уравнение, интегральные уравнение.

Keywords: boundary value problems, existence, uniqueness, Green's function, pseudo-hyperbolic equation, integral equations.

Задачи сопряжения для дифференциальных уравнений частных производных играют важную роль в теории и практике моделирования сложных процессов. В частности, исследование задач сопряжения для псевдо-гиперболических уравнений с разрывными коэффициентами имеет важное значение для описания процессов, характеризующихся резкими изменениями параметров в различных областях. Такие уравнения находят применение в механике, физике, инженерных науках и многих других областях, где встречаются неоднородные среды с различными физическими свойствами, а также границы раздела, на которых происходят скачки коэффициентов.

В частности, численные решение краевых задач для гиперболического уравнения четвертого порядка и обзор методов решения дифференциальных уравнений частных производных с использованием языка программирования Python рассмотрены в работах [3, 4].

Материал и методы исследования

В области $D=\{(x,t):-\ell_2<x<\ell_1, 0<t<h\}$ $(\ell_1,\ell_2,h>0)$ рассмотрим псевдо-гиперболическое уравнение четвертого порядка с разрывными коэффициентами на линии $x=0$:

$$a_i^2 u_{xxtt}-u_{ttt}+b_i(x,t)u_{tt}+c_i(x,t)u=f_i(x,t),(x,t)\in D_i(i=1,2), \tag{1}$$

где $a_i=const, b_i(x,t), c_i(x,t), f_i(x,t)(i=1,2)$ — заданные функции, а $D_1=D\cap(x>0), D_2=D\cap(x<0)$.

Задача 1. Найти функцию $u(x,t)\in C(\overline{D})\cap C^1(D)$, удовлетворяющую уравнению (1) в областях $D_i(i=1,2)$, краевым и начальным условиям

$$u(\ell_1,t)=\varphi_1(t), u(-\ell_2,t)=\varphi_2(t), 0\le t\le h, \tag{2}$$

$$u(x,0)=\psi_1(x), u_t(x,0)=\psi_2(x), u_{tt}(x,0)=\psi_3(x), 0\le x\le\ell_1, \tag{3}$$

$$u(x,0)=\psi_4(x), u_t(x,0)=\psi_5(x), u_{tt}(x,0)=\psi_6(x), -\ell_2\le x\le 0, \tag{4}$$

где $\varphi_i(t),\psi_j(x)(i=1,2; j=\overline{1,6})$ заданные функции, причем

$$\begin{aligned}&\varphi_1(0)=\psi_1(\ell_1), \varphi_2(0)=\psi_4(-\ell_2), \varphi_1'(0)=\psi_2(\ell_1),\\ &\varphi_2'(0)=\psi_5(-\ell_2), \psi_1(0)=\psi_4(0)=0, \psi_1'(0)=\psi_4'(0),\\ &\psi_2(0)=\psi_5(0), \psi_3(0)=\psi_6(0).\end{aligned} \tag{5}$$

Из постановки задачи 1 заключаем, что на линии $x=0$ выполняются следующие условия сопряжения: $u(+0,t)=u(-0,t)=\tau(t), u_x(+0,t)=u_x(-0,t)=\nu(t), 0\le t\le h,$ $\tau(t),\nu(t)$ — пока неизвестные функции.

Решение задачи 1 можно свести к решению двух вспомогательных задач.

Задача 2. Найти функцию $u(x,t)\in C(\overline{D_1})$, удовлетворяющую уравнению

$$a_1^2 u_{xxtt}-u_{ttt}+b_1(x,t)u_{tt}+c_1(x,t)u=f_1(x,t),(x,t)\in D_1, \tag{6}$$

начальным условиям (3) и краевым условиям

$$u_x(0,t)=\nu(t), u(\ell_1,t)=\varphi_1(t), 0\le t\le h, \tag{7}$$

Причем

$$\nu(0)=\psi_1'(0), \varphi_1''(0)=\psi_3(\ell_1). \tag{8}$$

Задача 3. Найти функцию $u(x,t)\in C(\overline{D_2})$, удовлетворяющую уравнению

$$a_2^2 u_{xxtt} - u_{ttt} + b_2(x,t)u_{tt} + c_2(x,t)u = f_2(x,t), (x,t)\in D_2, \tag{9}$$

начальным условиям (4) и краевым условиям

$$u(-t_2,t)=\varphi_2(t), u(0,t)=\tau(t), 0\le t\le h, \tag{10}$$

причем

$$\varphi_2''(0)=\psi_6(-\ell_2), \varphi_4(0)=\tau(0)=0. \tag{11}$$

Сначала рассмотрим задачу 2. Дважды интегрируя уравнение (6) по t от 0 до t и учитывая начальные условия (3) имеем:

$$a_1^2 u_{xx} - u_t = -b_1(x,t)u(x,t) - \int_0^t c_1^*(x,\eta)u(x,\eta)d\eta + f_1^*(x,t), \tag{12}$$

где

$$c_1^*(x,\eta) = -2b_{1\eta}(x,\eta) + (t-\eta)[c_1(x,\eta) + b_{1\eta\eta}(x,\eta)],$$

$$f_1^*(x,\eta) = [a_1^2\psi_2''(x) - \psi_3(x) + b_1(x.0)\psi_2(x) - b_{1t}(x,0)\psi_1(x)]t +$$
$$+a_1^2\psi_1''(x) - \psi_2(x) - b_1(x,0)\psi_1(x) + \int_0^t (t-\eta) f_1(x,\eta)d\eta.$$

Решая смешанную задачу для уравнения (12) с краевыми условиями (7) и начальным условием $u(x,o)=\psi_1(x)$, убеждаемся в том, что $u(x,t)$ является решением интегрального уравнения

$$u(x,t) = -a_1^2\int_0^t G_2(x,t;0,\eta)\nu(\eta)d\eta - a_1^2\int_0^t G_{2\xi}(x,t;\ell_1,\eta)\varphi_1(\eta)d\eta +$$
$$+\int_0^{\ell_1} G_2(x,t;\xi,0)\psi_1(\xi)d\xi - \int_0^t d\eta\int_0^{\ell_1} G_2(x,t;\xi,\eta) f_1^*(\xi,\eta)d\xi +$$
$$+\int_0^t d\eta\int_0^{\ell_1} G_2(x,t;\xi,\eta)b_1(\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\xi +$$
$$+\int_0^t d\eta\int_0^{\ell_1} [G_2(x,t;\xi,\eta_1)d\eta_1]c_1^*(\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\xi, \tag{13}$$

где $G(x,t;\xi,\eta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}[U(x,t;4n\ell_1+\xi,\eta) + U(x,t;4n\ell_1-\xi,\eta) - U(x,t;4n\ell_1+2\ell_1+\xi,\eta) -$
$-U(x,t;4n\ell_1+2\ell_1-\xi,\eta)] -$

функция Грина смешанной задачи для уравнения теплопроводности [1], а

 Т. 10. №12 2024
https://doi.org/10.33619/2414-2948/109

$$U(x,t;\xi,\eta)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{\pi a_1^2(t-\eta)}}\exp\left[-\dfrac{(x-\xi)^2}{4a_1^2(t-\eta)}\right], t>\eta,\\ 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad , t<\eta.\end{cases}$$

Пусть

$$\Phi_1(x,t)=\int_0^t G_2(x,t;\xi,0)\psi_1(\xi)d\xi-a_1^2\int_0^t G_{2\xi}(x,t;\ell_1,\eta)\varphi_1(\eta)d\eta-$$
$$-\int_0^t d\eta\int_0^{\ell_1} G_2(x,t;\xi,\eta)f_1^*(\xi,\eta)d\xi,$$

$$K_2(x,t;\xi,\eta)=c_1^*(\xi,\eta)\int_\eta^t G_2(x,t;\xi,\eta_1)d\eta_1+b_1(\xi,\eta)G_2(x,t;\xi,\eta).$$

Тогда уравнения (13) запишется в виде

$$u(x,t)=\Phi_1(x,t)-a_1^2\int_0^t G_2(x,t;0,\eta)\nu(\eta)d\eta+\int_0^t d\eta\int_0^{\ell_1} K_1(x,t;\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\xi. \tag{14}$$

Уравнение (14) можно рассматривать как интегральное уравнение типа Вольтера второго рода относительно $u(x,t)$. Поэтому, обращая интегральное уравнение (14) второго рода относительно $u(x,t)$, будем иметь:

$$u(x,t)=\Phi_2(x,t)+\int_0^t H_1(x,t;\eta)\nu(\eta)d\eta, \tag{15}$$

где

$$\Phi_2(x,t)=\Phi_1(x,t)+\int_0^t d\eta\int_0^{\ell_1} R_1(x,t;\xi,\eta)\Phi_1(\xi,\eta)d\xi,$$

$$H_1(x,t;\eta)=a_1^2G(x,t;0,\eta)-a_1^2\int_0^t d\xi\int_\eta^t G_2(\xi,\eta_1;0,\eta)R_1(x,t;\xi,\eta_1)d\eta_1,$$

$R_1(x,t;\xi,\eta)$ - резольвента ядра $K_1(x,t;\xi,\eta)$.

Полагая $x=0$ в (15), получаем соотношение между $\tau(t)$ и $\nu(t)$, принесенные из области D_1 :

$$\tau(t)=\Phi_2(0,t)+\int_0^t H_1(0,t;\eta)\nu(\eta)d\eta. \tag{16}$$

Далее переходим к вспомогательной задаче 3. Как и в задаче 2, интегрируя уравнения (9) дважды по t от 0 до t и с учетом начальных условий (4), имеем:

$$a_2^2u_{xx}-u_t=-b_2(x,t)u(x,t)-\int_0^t c_2^*(x,\eta)u(x,\eta)d\eta+f_2^*(x,t), \tag{17}$$

где

Т. 10. №12 2024
https://doi.org/10.33619/2414-2948/109

$$c_2^*(x,\eta)=-2b_{2\eta}(x,\eta)+(t-\eta)[c_2(x,\eta+b_{2\eta\eta}(x,\eta],$$
$$f_2^*(x,t)=[a_2^2\psi_5''(x)-\psi_6(x)+b_{2t}(x,0)\psi_4(x)]t+$$
$$+a_2^2\psi_4''(x)-\psi_5(x)+b_2(x,0)\psi_4(x)-\int_0^t(t-\eta)f_2(x,\eta)d\eta.$$

Решая первую краевую задачу для уравнения (17) с начальным условием $u(x,0)=\psi_4(x)$ и краевыми условиями $u(-\ell_2,t)=\varphi_2(t),u(0,t)=\tau(t),0\le t\le h,$ имеем [2]:

$$u(x,t)=a_2^2\int_0^t G_{1\xi}(x,t;-\ell_2,\eta)\varphi_2(\eta)d\eta-a_2^2\int_0^t G_{1\xi}(x,t;0,\eta)\tau(\eta)d\eta+ \tag{18}$$
$$+\int_{-\ell_2}^0 G_1(x,t;\xi,0)\psi_4(\xi)d\xi-\int_0^t d\eta\int_{-\ell_2}^0 G_1(x,t;\xi,\eta)f_2^*(\xi,\eta)d\xi+$$
$$+\int_0^t d\eta_1\int_{-\ell_2}^0 G_1(x,t;\xi,\eta_1)\int_0^{\eta_1}c_2^*(\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\eta+$$
$$+\int_0^t d\eta\int_{-\ell_2}^0 G_1(x,t;\xi,\eta)b_2(\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\xi,$$

где

$$G_1(x,t;\xi,\eta)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[U(x,t;2n\ell_2+\xi,\eta)-U(x,t;2n\ell_2-\xi,\eta)\right]-$$

Функция Грина первой краевой задачи для уравнения теплопроводности, а

$$U(x,t;\xi,\eta)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{\pi a_2^2(t-\eta)}}\exp\left[-\dfrac{(x-\xi)^2}{4a_2^2(t-\eta)}\right], & t>\eta,\\ 0, & t<\eta.\end{cases}$$

Пусть

$$\Phi_3(x,t)=a_2^2\int_0^t G_{1\xi}(x,t;-\ell_2,\eta)\varphi_2(\eta)d\eta+\int_{-\ell_2}^0 G_1(x,t;\xi,0)\psi_4(\xi)d\xi-$$
$$-\int_0^t d\eta\int_{-\ell_2}^{\ell_1} G_1(x,t;\xi,\eta)f_2^*(\xi,\eta)d\xi,$$

$$K_2(x,t;\xi,\eta)=c_2^*(\xi,\eta)\int_\eta^t G_1(x,t;\xi,\eta_1)d\eta_1+b_2(\xi,\eta)G_1(x,t;\xi,\eta).$$

Тогда уравнения (18) запишется в виде

$$u(x,t)=\Phi_3(x,t)-a_2^2\int_0^t G_{1\xi}(x,t;0,\eta)\tau(\eta)d\eta+\int_0^t d\eta\int_{-\ell_2}^0 K_2(x,t;\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\xi. \tag{19}$$

Обращая уравнение (19) относительно $u(x,t)$ будем иметь

$$u(x,t)=\Phi_4(x,t)+\int_0^t H_2(x,t;\eta)\tau(\eta)d\eta, \tag{20}$$

где

$$\Phi_4(x,t)=\Phi_3(x,t)+\int_0^t d\eta\int_{-\ell}^{0} R_2(x,t;\xi,\eta)\Phi_3(\xi,\eta)d\xi,$$

$$H_2(x,t;\eta)=a_2^2G_{1\xi}(x,t;0,\eta)-a_2^2\int_{-\ell_2}^{t} d\xi\int_{\eta}^{t} G_{1\xi}(\xi,\eta_1;0,\eta)R_1(x,t;\xi,\eta_1)d\eta_1,$$

$R_2(x,t;\xi,\eta)$ — резольвента ядра $K_2(x,t;\xi,\eta)$.

В силу того, что $\tau(0)=0,$ функцию $\tau(\eta)$ можно представить в виде $\tau(\eta)=\int_0^{\eta}\tau'(s)ds.$

Тогда соотношение (20) запишется в виде

$$u(x,t)=\Phi_4(x,t)+\int_0^t I(x,t;\eta)\tau'(s)ds, \tag{21}$$

где

$$I(x,t;\eta)=\int_s^t H_2(x,t;\eta)d\eta. \tag{22}$$

Функцию $G_{1\xi}(x,t;0,\eta)$ представим в виде

$$G_{1\xi}(x,t;0,\eta)=\frac{x}{2\sqrt{\pi}a_2^3(t-\eta)^{\frac{3}{2}}}\exp\left[-\frac{x^2}{4a_2^2(t-\eta)}\right]+P_1(x,t;\eta), \tag{23}$$

где $P_1(x,t;\eta)=\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{+\infty}\frac{x-2\ln\ell_2}{2\sqrt{\pi}a_2^3(t-\eta)^{\frac{3}{2}}}\exp\left[-\frac{(x-2\ln\ell_2)^2}{4a_2^2(t-\eta)}\right].$

Тогда функцию (22) с учетом представления (23) можно записать в виде

$$I(x,t;s)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{x}{2a_2\sqrt{t-s}}} e^{-\sigma^2}d\sigma+I_1(x,t;s), \tag{24}$$

где $I_1(x,t;s)=\int_s^t P_1(x,t;\eta)d\eta-a_2^2\int_s^t d\eta\int_{-\ell_2}^{0} d\xi\int_{\eta}^{t} G_{1\xi_1}(\xi,\eta_1;0,\eta)R_2(x,t;\xi,\eta_1)d\eta_1.$

Дифференцируя по x соотношение (21), затем полагая $x=0$ и с учетом представления (24) будем иметь функциональное соотношение между функциями $\tau(t)$ и $\nu(t),$ принесенные из области D_2 :

$$\nu(t)=\Phi_5(t)+\frac{1}{a_2\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{\tau'(s)}{\sqrt{t-s}}ds+\int_0^t I_{1x}(x,t;s)\tau'(s)ds, \tag{25}$$

где $\Phi_5(t) = \Phi_{4x}(0,t)$.

Исключая $\nu(t)$ из (16) и (25), получим интегро-дифференциальное уравнение

$$\tau(t) = \Phi_6(t) + \frac{1}{a_2\sqrt{\pi}}\int_0^t H_1(0,t;\eta)d\eta\int_0^\eta \frac{\tau'(s)ds}{\sqrt{\eta - s}}ds + \tag{26}$$

$$+\int_0^t H_1(0,t;\eta)d\eta\int_0^\eta I_{1x}(0,\eta;s)\tau'(s)ds,$$

где $\Phi_6(t) = \Phi_2(0,t) + \int_0^t H_1(0,t;\eta)\Phi_5(\eta)d\eta$.

Дифференцируя уравнение (26) будем иметь

$$\tau'(t) = \Phi_7(t) + \int_0^t H(t,s)\tau'(s)ds, \tag{27}$$

где

$$\Phi_7(t) = \frac{a_1}{a_1 + a_2}\Phi_6'(t), H(t,s) = \int_s^t \frac{H_{1t}^*(t,\eta)d\eta}{(a_1 + a_2)\sqrt{\pi(\eta - s)}} -$$

$$-\int_0^1 \frac{a_1 a_2 H_{1x}(0, s + (t-s)\sigma, s)}{2(a_1 + a_2)\sqrt{\pi(1-\sigma)}}d\sigma + \frac{a_2}{a_1 + a_2}\int_0^t H_{1t}^*(t,\eta)I_{1x}(0,\eta;s)d\eta -$$

$$-\int_0^1 \frac{a_1 a_2 \delta\sqrt{t-s}}{(a_1 + a_2)\sqrt{\pi(1-\delta)}}H_{1x\eta}(0, s + (t-s)\delta, s)d\delta.$$

Обращая уравнение (27), найдем $\tau'(t)$ и тем самим из 25 функцию $\nu(t)$.

Тогда по формулам (15) и (20) определим решения вспомогательных **задач 2** и **3**.

Таким образом, доказана

Теорема 1. Пусть

$\psi_1(x), \psi_2(x) \in C^2[0,\ell_1], \psi_4(x), \psi_5(x) \in C^2[-\ell_2, 0]$,

$\psi_3(x) \in C[0,\ell_1], \psi_5(x) \in C[\ell_2, 0], \varphi_1(t), \varphi_2(t) \in C^1[0,h]$,

$c_i(x,t),\ f_i(x,t), b_i(x,t), b_{i\eta\eta}(x,t) \in C(D_i)(i = 1,2)$

и выполняются условия (5), (8) и (11). Тогда решение задачи 1 существует и единственно.

Заключение

Методом функции Грина и интегральных уравнений доказаны существование и единственность решений задачи 2 и 3, и тем самим установлены справедливость теоремы 1.

Список литературы:

1. Нахушев А. М. Уравнения математической биологии. М.: Высшая школа, 1995. 301 с.

2. Трикоми Ф. Лекции по уравнениям в частных производных. М.: ИЛ, 1957. 444 с.

3. Пирматов А. З., Азимов Б. А. Методы решения дифференциальных уравнений на языке Python // Бюллетень науки и практики. 2023. Т. 9. №12. С. 39-46. https://doi.org/10.33619/2414-2948/97/04

4. Садалов Т., Пирматов А., Кызы А. И., Сатимкулов А. Численные решение краевых задач для гиперболического уравнения четвертого порядка с трехкратными характеристиками // Вестник Ошского государственного университета. 2022. №1. С. 126-135. https://doi.org/10.52754/16947452_2022_1_126

References:

1. Nakhushev, A. M. (1995). Uravneniya matematicheskoi biologii. Moscow. (in Russian).
2. Trikomi, F. (1957). Lektsii po uravneniyam v chastnykh proizvodnykh. Moscow. (in Russian).
3. Pirmatov, A., & Azimov, B. (2023). Methods for Solving Differential Equations in Python Language. *Bulletin of Science and Practice*, *9*(12), 39-46. (in Russian). https://doi.org/10.33619/2414-2948/97/04
4. Sadalov, T., Pirmatov, A., Kyzy, A. I., & Satimkulov, A. (2022). Chislennye reshenie kraevykh zadach dlya giperbolicheskogo uravneniya chetvertogo poryadka s trekhkratnymi kharakteristikami. *Vestnik Oshskogo gosudarstvennogo universiteta*, (1), 126-135. (in Russian). https://doi.org/10.52754/16947452_2022_1_126

Работа поступила в редакцию 04.11.2024 г.

Принята к публикации 12.11.2024 г.

Ссылка для цитирования:

Пирматов А. З., Исаков Т. Э., Сактанов У. А. Задачи сопряжения для псевдогиперболического уравнения четвертого порядка с разрывными коэффициентами // Бюллетень науки и практики. 2024. Т. 10. №12. С. 14-21. https://doi.org/10.33619/2414-2948/109/01

Cite as (APA):

Pirmatov, A., Isakov, T. & Saktanov, U. (2024). Conjunction Problems for a Pseudo-hyperbolic Equation of the Fourth Order with Discontinuous Coefficients. *Bulletin of Science and Practice*, *10*(12), 14-21. (in Russian). https://doi.org/10.33619/2414-2948/109/01