УДК 517.928 https://doi.org/10.33619/2414-2948/107/01

ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ С БОЛЬШИМИ ПАРАМЕТРАМИ, ПОСТРОЕНИЕ ОБЛАСТЕЙ

©Алыбаев К. С., *ORCID: 0000-0002-7962-534X, SPIN-код: 2396-5503, д-р физ.-мат. наук,*
Жалал-Абадский государственный университет,
г. Джалал-Абад, Кыргызстан, alybaevkurmanbek@rambler.ru
©Эрматали уулу Б., *ORCID: 0009-0007-7538-5354, SPIN-код: 6820-5273,*
Жалал-Абадский государственный университет,
г. Джалал-Абад, Кыргызстан, ermataliеvbayaman@gmail.com

FUNCTIONS OF A COMPLEX VARIABLE WITH A LARGE PARAMETER AND CONSTRUCTION OF REGIONS

©Alybaev K., *ORCID: 0000-0002-7962-534X, SPIN-code: 2396-5503, Dr. habil.,*
Jalal-Abad State University Kyrgyzstan,
Jalal-Abad, Kyrgyzstan, alybaevkurmanbek@rambler.ru
©Ermatali uulu B., *ORCID: 0009-0007-7538-5354, SPIN-code: 6820-5273,*
Jalal-Abad State University Kyrgyzstan,
Jalal-Abad, Kyrgyzstan, ermataliеvbayaman@gmail.com

Аннотация. Исследование асимптотического поведения решений сингулярно возмущенных уравнений в комплексных областях сводится к исследованию интегралов от экспоненциальных функций содержащих большой параметр. Такие интегралы существенно отличаются от интегралов к которым применима метод перевала. Для исследования таких интегралов метод перевала не применима. Таким образом возникает задача построения областей и выбора путей интегрирования для исследования таких интегралов. В данной работе на конкретных примерах интегралов показаны построение областей в комплексной плоскости и выбор путей интегрирования. Выбранные пути интегрирования обеспечивают ограниченность интегралов по большому параметру при стремлении этого параметра к бесконечности. При построении области и выбора путей интегрирования использованы линии уровня некоторых гармонических функций, которые имеют нули и особые точки. Также использован принцип симметрии. В ранних работах были рассмотрены случаи, когда собственные значения матрицы первого приближения сингулярно возмущенного уравнения имели только нули или только полюса. Случаи, когда собственные значения имеют как нули, так полюсы не были рассмотрены.

Abstract. The study of the asymptotic behavior of solutions of singularly perturbed equations in complex domains comes down to the study of integrals of exponential functions containing a large parameter. Such integrals differ significantly from the integrals to which the saddle point method is applicable. The saddle point method is not applicable to study such integrals. Thus, the problem arises of constructing domains and choosing integration paths for studying such integrals. In this work, specific examples of integrals show the construction of regions in the complex plane and the choice of integration paths. The chosen integration paths ensure that the integrals are bounded over a large parameter as this parameter tends to infinity. When constructing the domain and choosing integration paths, level lines of some harmonic functions that have zeros and singular points were used. The principle of symmetry is also used. In early works, cases were considered when the eigenvalues of the first approximation matrix of a singularly perturbed equation had only zeros or only poles. Cases where the eigenvalues have zeros and poles were not considered.

Ключевые слова: сингулярно возмущенные уравнения, асимптотическая ограниченность, линии уровня, выбор путей.

Keywords: singularly perturbed equations, asymptotic boundedness, level lines, choice of paths.

Постановка задачи. Асимптотическое поведение решений сингулярно возмущенных уравнений сводится к исследовании функций [1-5]

$$F(t_0,t,\lambda)=\left(\int_{t_0}^{t} exp\lambda(\varphi_1(t_0,t)-\varphi_1(t_0,\tau))d\tau\,,\ldots,\int_{t_0}^{t} exp\lambda(\varphi_n(t_0,t)-\varphi_n(t_0,\tau))d\tau\right), \quad (1)$$

где $0<\lambda$ — большой параметр; $t_0,t\in D\subset C$ — множество комплексных чисел, а D — односвязная, открытая область; t_0 — фиксирована, t переменная.

Пусть выполняется условие:

У. $\varphi_j(t_0,t)\in Q(D)$ – пространство аналитических функций в $D, j=1,\ldots,n$.

Задача. Определить область $D_0\subset D$, где выполняется соотношение

$$\forall t\in D_0(\|F(t_0,t,\lambda)\|\le C_1-const \text{ при } \lambda\to+\infty), \quad (2)$$

$$\|F(t_0,t,\lambda)\|=\max_{t\in D_0}|\varphi_j(t_0,t)|.$$

Поставленную задачу решим для следующих случаев:

1. $\varphi_1(t_0,t)=(t+i)^2-(t_0+i)^2$, $\varphi_2(t_0,t)=2ln(t+i)-2ln(t_0+i)$.
2. $\varphi_1(t_0,t)=(t-i)^2-(t_0-i)^2$, $\varphi_2(t_0,t)=2ln(t-i)-2ln(t_0-i)$.
3. $\varphi_1(t_0,t)=(t+i)^2-(t_0+i)^2, \varphi_2(t_0,t)=(t-i)^2-(t_0-i)^2$,

$$\varphi_3(t_0,t)=2\ln(t+i)-2\ln(t_0+i), \varphi_4(t_0,t)=2\ln(t-i)-2\ln(t_0-i).$$

Рассмотрим случай 1. Как показывают исследования проведенные в [1-5] если удаётся определить область D_0 и множество $\Omega=\{(p(t_0,t))\}$, где $\left(p(t_0,t)\right)$ — гладкая или кусочно-гладкая кривая соединяющая точки $t_0,t\in D_0\subset D$, причем по кривым $(p(t_0,t))$ функции $Re\varphi_j(t_0,t)$ — не возростают, то выполняется (2).

Таким образом решение задачи сводиться к определению области D_0 и построению множества Ω.

1. Геометрические построения. Сначала построим область D_0. Для этого в ведем в рассмотрение функции $Re\varphi_{11}=t_1^2-(t_2+1)^2, Re\varphi_{21}=\ln(t_1^2+(t_2+1)^2)$ и их линии уровня. Точка (0; -1) является точкой перевала для функции $Re\varphi_{11}$. Линия уровня $(p_0)=\{t\in C, Re\varphi_{11}=0\}$, проходящая через точку перевала, всю плоскость C разбивает на четыре сектора, причем в каждом из этих секторов $Re\varphi_{11}$ принимает либо положительные, либо отрицательные значения. Линии уровня $(p)=\{t\in C, Re\varphi_{11}=p\neq 0\}$ являются гиперболами, а линии уровня $(q)=\{t\in C, Re\varphi_{21}=q\}$ концентрическими окружностями, с центром в точке (0; -1) (Рисунок 1).

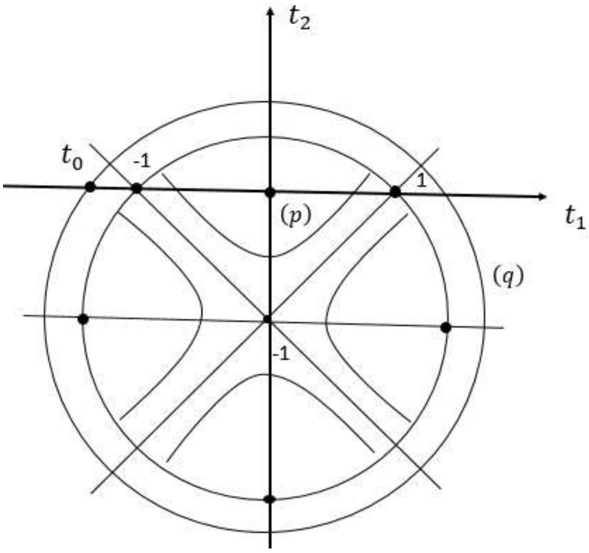

Рисунок 1. Линии уровня (p) и (q)

Возьмём $t_0 < 1$. Тогда окружность $(t_1^2 + (t_2+1)^2 = r^2)$ проходящая через точку $(t_0; 0)$ имеет радиус $r = \sqrt{t_0^2+1}$. Верхнюю часть окружности соединяющую точки $(t_0; 0)$, (1-δ; -1+$\sqrt{t_0^2+2\delta-\delta^2}$) обозначим (K_1). Найдем уравнение прямой проходящую через точки $(t_0; 0)$ и (0; -1+δ) (0<δ – const не зависящая от ε).

Пусть $t_2 = kt_1 + b$. Полагая $t_1 = -t_0, t_2 = 0$, затем $t_1 = 0, t_2 = -1+\delta$ находим k и b

$$b = -kt_0, \qquad k = \frac{1-\delta}{t_0},$$

тогда $t_2 = \frac{1-\delta}{t_0}(t_1 - t_0)$. Часть этой прямой обозначим $[(t_0; 0); (0;\ -1+\delta)]$. Теперь проведем прямую $t_1 = 1-\delta$. Эта прямая с (K_1) пересекается в точке $(1-\delta;\ -1+\sqrt{t_0^2+2\delta-\delta^2})$. Часть пррямой $t_1 = 1-\delta$ соединяющая точки (1-δ; 0); (1-δ; -1+$\sqrt{t_0^2+2\delta-\delta^2}$) обозначим $\left[(1-\delta; 0), (1-\delta;\ -1+\sqrt{t_0^2+2\delta-\delta^2})\right]$.

Часть прямой $t_1 - t_2 - 1 + \delta = 0$ соединяющая точки (0; -1+δ) и (1-δ; 0) обозначим $[(0;\ -1+\delta)$ и $(1-\delta;\ 0)]$. Через (K_2) обозначим: $[(t_0; 0), (0;\ -1+\delta)] \cup [(0;\ -1+\delta), (1-\delta;\ 0)] \cup \left[(1-\delta;\ 0), (1-\delta;\ -1+\sqrt{t_0^2+2\delta-\delta^2})\right]$. Рассмотрим область D_0 ограниченный $(K_1) \cup (K_2)$ (Рисунок 2).

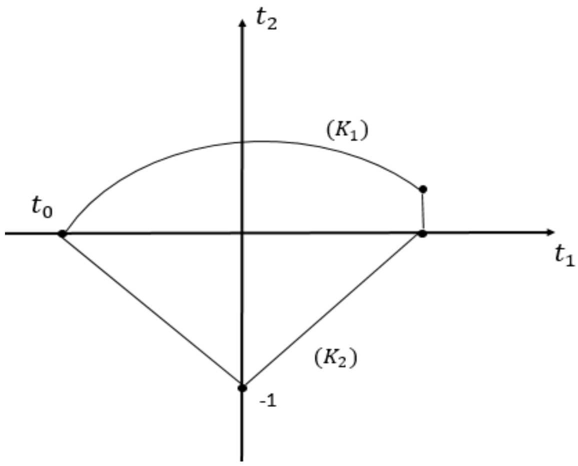

Рисунок 2. Область D_0

Теперь определим множество Ω для $\mathrm{Re}\varphi_{11}(\mathrm{p}(\mathrm{t}_0,\mathrm{t}))$ состоит из части $(\mathrm{K}_2)[(\mathrm{t}_0,\mathrm{t}),(\mathrm{t}_1,\tilde{\mathrm{t}}_2)]$ и отрезка $[(\mathrm{t}_1,\tilde{\mathrm{t}}_2),(\mathrm{t}_1,\mathrm{t}_2)]((\mathrm{t}_1,\tilde{\mathrm{t}}_2)\in \mathrm{K}_2,(\mathrm{t}_1,\mathrm{t}_2)\in \mathrm{D}_0))$; для $\mathrm{Re}\varphi_{21}(\mathrm{p}(\mathrm{t}_0,\mathrm{t}))$ состоит из части $(\mathrm{K}_1)[(\mathrm{t}_0,0),(\mathrm{t}_1,\tilde{\mathrm{t}}_2)]$ и отрезка $[(\mathrm{t}_1,\tilde{\mathrm{t}}_2),(\mathrm{t}_1,\mathrm{t}_2)]((\mathrm{t}_1,\tilde{\mathrm{t}}_2)\in \mathrm{K}_1,(\mathrm{t}_1,\mathrm{t}_2)\in \mathrm{D}_0))$ (Рисунок 3).

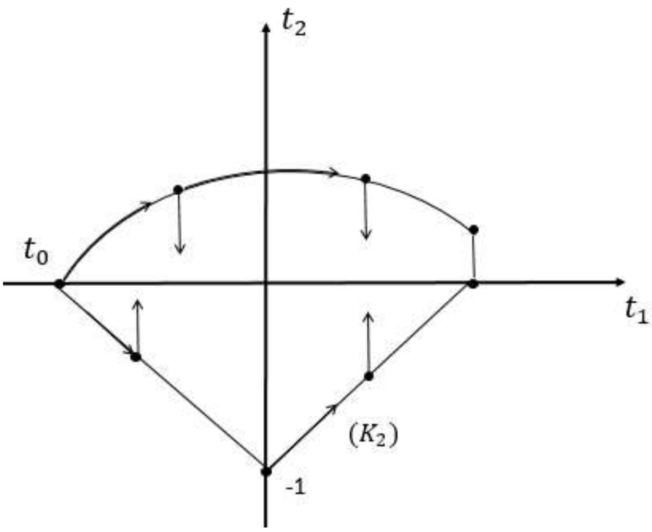

Рисунок 3. Пути $(p(t_0,t))$

Нетрудно проверить, по выбранным путьям $(\mathrm{p}(\mathrm{t}_0,\mathrm{t}))$ функции $\mathrm{Re}\varphi_{11}$ и $\mathrm{Re}\varphi_{21}$ не возрастают.

Теперь рассмотрим случай 2. Заметим функции $Re\varphi_{11}=t_1^2-(t^2+1)^2$ и $Re\varphi_{12}=t_1^2-(t^2-1)^2$; $Re\varphi_{21}=\ln(t_1^2+(t^2+1)^2$ и $Re\varphi_{22}=\ln(t_1^2+(t^2-1)^2$ в симметричных, относительно действительной оси, точках принимают равные значения.

Тогда возьмём кривые $(\overline{\mathrm{K}}_1)$ и $(\overline{\mathrm{K}}_2)$, которые симметричны, соответственно, к кривым (K_1) и (K_2) , относительно действительной оси. Область ограниченный $(\overline{\mathrm{K}}_1)$ и $(\overline{\mathrm{K}}_2)$ обозначим $(\overline{\mathrm{D}}_0)$. Для этого случая пути $(\overline{\mathrm{p}}(\mathrm{t}_0,\mathrm{t}))$ выбираются симметричными, относительно действительной оси, к путьям $(\mathrm{p}(\mathrm{t}_0,\mathrm{t}))$. По выбраным путьям функции $\mathrm{Re}\varphi_{12}$ и $\mathrm{Re}\varphi_{22}$ не возростают.

Случай 3. Как и в предыдущих случаях рассмотрим функции

$\varphi_{11}(t)=(t+i)^2,\varphi_{21}(t)=(t-i)^2,\varphi_{31}(t)=2ln(t+i),\varphi_{41}(t)=2ln(t-i)$ и

$Re\varphi_{11}(t)=t_1^2-(t^2+1)^2$, $Re\varphi_{21}(t)=t_1^2-(t^2-1)^2$;

$Re\varphi_{31}(t)=\ln(t_1^2+(t^2+1)^2$, $Re\varphi_{41}(t)=\ln(t_1^2+(t^2-1)^2$.

В этом случае сгрупируем рассматриваемые функции. Обьединим $\mathrm{Re}\varphi_{11}(\mathrm{t})$ с $\mathrm{Re}\varphi_{41}(\mathrm{t})$, а $\mathrm{Re}\varphi_{21}(\mathrm{t}_0,\mathrm{t})$ с $\mathrm{Re}\varphi_{31}(\mathrm{t}_0,\mathrm{t})$. Покажем один из возможных вариантов определения D_0 и Ω. Будем считать $\mathrm{t}_0>\sqrt{3}$ и проведем прямую проходящую через точки $(-\mathrm{t}_0,0)$ с угловым коэффициентом $\mathrm{k}=-1$ т.е. $\mathrm{t}_2=-(\mathrm{t}_1+\mathrm{t}_0)$. Далее проведем прямую (l) $\mathrm{t}_1-\mathrm{t}_2-1+\delta=0$ (0<δ – достаточно малое число не завиящее от ε). Данные прямые пересекаются в точке $\mathrm{A}_1\left(-\frac{1}{2}(\mathrm{t}_0-1+\delta),\ -\frac{1}{2}(\mathrm{t}_0+1-\delta)\right)$.

Прямая (l) ось t_1 пересекает в точке $(1-\delta;0)$ отрезок $[(-\mathrm{t}_0;0),\ \mathrm{A}_1]$ обозначим (K_1), а отрезок $[\mathrm{A}_1,\ \mathrm{A}_2]$ (K_2). . Далее определим $(\overline{\mathrm{K}}_1)$ и $(\overline{\mathrm{K}}_2)$ соответственно симметричные, относительно действительной оси к, (K_1) и (K_2). Область ограниченный (K_1), (K_2), $(\overline{\mathrm{K}}_1)$, $(\overline{\mathrm{K}}_2)$ возьмём за D_0 (Рисунок 4).

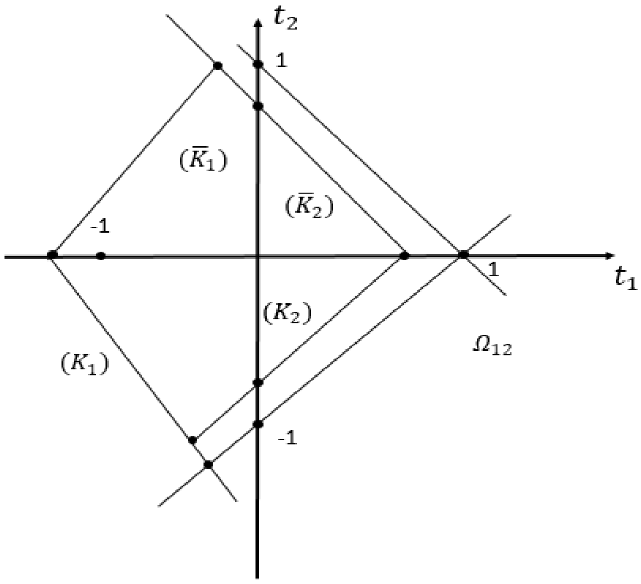

Рисунок 4. Область D_0

Выберем пути интегрирования. Для $\mathrm{Re}\varphi_{11}(t)$ и $\mathrm{Re}\varphi_{41}(t)$ путь $\big(p(t_0,t)\big)$ состоит из части $(K_1)\cup(K_2)[(t_0;\ 0),\tilde{t}]$ и отрезка $[\tilde{t}=t_1+i\tilde{t}_2, t=\ t_1+it_2]$, а для $\mathrm{Re}\varphi_{21}(t)$ и $\mathrm{Re}\varphi_{31}(t)$ путь $\big(\overline{p(t_0,t)}\big)$ выбриается, симметричным (относительно действительной оси) к $\big(p(t_0,t)\big)$. Нетрудно проверить по $\big(p(t_0,t)\big)$ функции $\mathrm{Re}\varphi_{11}(t)$, $\mathrm{Re}\varphi_{41}(t)$, а по $\big(\overline{p(t_0,t)}\big)$ функции $\mathrm{Re}\varphi_{21}(t)$, $\mathrm{Re}\varphi_{31}(t)$ не возрастают

Выводы

На некоторых примерах функций комплексного переменного показано построение областей и выбор путей интегрирования, которые обеспечивают асимптотическую ограниченность интегралов экспоненциальных функций с большим параметром.

Список литературы:

1. Шишкова М. А. Рассмотрение одной системы дифференциальных уравнений с малым параметром при высших производных // Доклады Академии наук. 1973. Т. 209. №3. С. 576-579.

2. Нейштадт А. И. О затягивании потери устойчивости при динамических бифуркациях. II // Дифференциальные уравнения. 1988. Т. 24. №2. С. 226-233.

3. Алыбаев К. С. Метод линий уровня исследования сингулярно возмущенных уравнений при нарушении условия устойчивости //Вестник КГНУ. 2001. Т. 3. С. 190-200.

4. Алыбаев К. С., Нурматова М. Н. Явление затягивания потери устойчивости в теории сингулярных возмущений // Бюллетень науки и практики. 2023. Т. 9. №12. С. 12-19. https://doi.org/10.33619/2414-2948/97/01

5. Алыбаев К. С., Мусакулова Н. К. Расщепление решений слабо нелинейных сингулярно возмущенных уравнений при регулярном вырождении // Бюллетень науки и практики. 2023. Т. 9. №12. С. 20-29. https://doi.org/10.33619/2414-2948/97/02

6. Алыбаев К., Мусакулова Н. Метод линий уровня в теории сингулярно возмущенных уравнений // Вестник Ошского государственного университета. 2022. №4. С. 206-217. https://doi.org/10.52754/16947452_2022_4_206

7. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Лань, 2002. 688 с.

8. Вазов В. Р. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1968. 464 с.

9. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973. 272 с.

10. Привалов И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного. М.: Наука, 1977. 444 с.

References:

1. Shishkova, M. A. (1973). Rassmotrenie odnoi sistemy differentsial'nykh uravnenii s malym parametrom pri vysshikh proizvodnykh. *Doklady Akademii nauk, 209*(3), 576-579. (in Russian).

2. Neishtadt, A. I. (1988). O zatyagivanii poteri ustoichivosti pri dinamicheskikh bifurkatsiyakh. II. *Differentsial'nye uravneniya, 24*(2), 226-233. (in Russian).

3. Alybaev, K. S. (2001). Metod linii urovnya issledovaniya singulyarno vozmushchennykh uravnenii pri narushenii usloviya ustoichivosti. *Vestnik KGNU, 3*, 190-200. (in Russian).

4. Alybaev, K., & Nurmatova, M. (2023). The Phenomenon of Delaying Loss of Stability in the Theory of Singular Perturbations. *Bulletin of Science and Practice, 9*(12), 12-19. (in Russian). https://doi.org/10.33619/2414-2948/97/01

5. Alybaev, K., & Musakulova, N. (2023). Splitting of Solutions of Weakly Nonlinear Singularly Perturbed Equations Under Regular Degeneration. *Bulletin of Science and Practice, 9*(12), 20-29. (in Russian). https://doi.org/10.33619/2414-2948/97/02

6. Alybayev K., & Musakulova N. (2022). Level line method in the theory of singularly perturbed equations. *Vestnik Oshskogo gosudarstvennogo universiteta*, (4), 206-217. (in Russian). https://doi.org/10.52754/16947452_2022_4_206

7. Lavrent'ev, M. A., & Shabat, B. V. (2002). Metody teorii funktsii kompleksnogo peremennogo. Moscow. (in Russian).

8. Vazov, V. R. (1968). Asimptoticheskie razlozheniya reshenii obyknovennykh differentsial'nykh uravnenii. Moscow. (in Russian).

9. Vasil'eva, A. B., & Butuzov, V. F. (1973). Asimptoticheskie razlozheniya reshenii singulyarno vozmushchennykh uravnenii. Moscow. (in Russian).

10. Privalov, I. I. (1977). Vvedenie v teoriyu funktsii kompleksnogo peremennogo. Moscow. (in Russian).

Работа поступила в редакцию 16.09.2024 г.

Принята к публикации 22.09.2024 г.

Ссылка для цитирования:

Алыбаев К. С., Эрматали уулу Б. Функции комплексных переменных с большими параметрами, построение областей // Бюллетень науки и практики. 2024. Т. 10. №10. С. 11-16. https://doi.org/10.33619/2414-2948/107/01

Cite as (APA):

Alybaev, K. & Ermatali uulu, B. (2024). Functions of a Complex Variable with a Large Parameter and Construction of Regions. *Bulletin of Science and Practice, 10*(10), 11-16. (in Russian). https://doi.org/10.33619/2414-2948/107/01