УДК 51(075.8)
AGRIS U10

https://doi.org/10.33619/2414-2948/106/01

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КОНКУРЕНЦИИ ПОПУЛЯЦИЙ НА ЗАГРЯЗНЕННОЙ ТЕРРИТОРИИ

*©**Колпак Е. П.,** SPIN-код: 3611-8302, ORCID: 0000-0001-6956-4814, д-р физ.-мат. наук, Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург, Россия, petrovich_pmpu@mail.ru*

A MATHEMATICAL MODEL OF POPULATION COMPETITION IN A POLLUTED AREA

*©**Kolpak E.,** SPIN-code: 3611-8302, ORCID: 0000-0001-6956-4814, Dr. habil., St. Petersburg State University, St. Petersburg, Russia, petrovich_pmpu@mail.ru*

Аннотация. Техногенное воздействие на окружающую среду приводит к изменению видовой структуры экосистем. Внешнее ингибирующее воздействие на конкурирующие популяции приводит к изменению их численности. Одной из задач прогнозирования является теоретическая проработка направлений изменения численности популяций. Разработана математическая модель конкуренции двух популяций, учитывающая изменение скорости роста численности популяции и изменение емкости экологической ниши. Дана оценка направлений изменения численности популяции. Модель представлена задачей Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Abstract. Anthropogenic impact on the environment leads to a change in the species structure of ecosystems. An external inhibitory effect on competing populations leads to a change in their numbers. One of the tasks of forecasting is the theoretical study of the directions of population change. The paper develops a mathematical model of competition between two populations, taking into account the change in the rate of population growth and the change in the capacity of the ecological niche. An assessment of the directions of population change is given. The model is represented by the Cauchy problem for a system of ordinary differential equations.

Ключевые слова: выживаемость, математическая модель, популяция, антропогенное воздействие, устойчивость, распределение вероятностей.

Keywords: survival, mathematical model, population, anthropogenic impact, sustainability, probability distribution.

Техногенные вмешательства в природную среду стали соперничать со многими природными процессами, оказывая мощное воздействие на природные комплексы, вызывая нарушения нормального хода протекающих в различных биогеоценозах процессов. Вредные для всего живого вещества антропогенного происхождения наполняют воздушный и водный бассейны, загрязняя обширные территории [1, 2], Загрязнение среды обитания ведет к кардинальным изменениям условий существования населяющих эти территории растений и животных, может изменить направленность и формы естественного отбора [3], способно изменять генетическую структуру природных популяций [4], привести к уменьшению видового разнообразия и исчезновению отдельных видов [5]. В дополнение к этому изменяется и интенсивность межвидовых взаимоотношений, обусловленная различной реакцией особей на внешние воздействия. У конкурирующих популяций изменяется численность, происходит смена доминирующих видов, некоторые виды исчезают [6].

Проникновение химических веществ в организмы человека, птиц, млекопитающих и рыб происходит через органы дыхания, желудочно-кишечный тракт, кожные покровы и слизистые оболочки. В растения загрязняющие вещества попадают при корневом питании, путем газообмена и обменной адсорбции с поверхности листовой пластинки. По мере поступления в трофические цепи токсиканты аккумулируются в их конечных звеньях, оказывая негативное влияние на клеточном, гистологическом, организменном и популяционном уровнях. Уровень накопленных токсикантов в организме зависит от возраста, пола, путей поступления в организм [4]. Накопление токсикантов сопровождается изменением плодовитости и смертности характерными для каждого вида.

Математическая модель

Для описания динамики численности двух конкурирующих популяций используется локальная «модифицированная» математическая модель Вольтерры [7], учитывающая как межвидовую, так и внутривидовую конкуренцию:

$$\frac{du_1}{dt} = \mu_1 u_1 \left(1 - u_1 - \gamma_1 u_2\right), \qquad (1)$$
$$\frac{du_2}{dt} = \mu_2 u_2 \left(1 - u_2 - \gamma_2 u_1\right),$$

где u_1 и u_2 — численность популяций, μ_1 и μ_2 — удельные локальные скорости роста численности популяций, γ_1 и γ_2 — параметры, характеризующие интенсивность конкуренции. Емкости сред обеих популяций приняты в модели (1) равными единице [7].

Система уравнений (1) имеет четыре неподвижные точки

1. $u_1 = 0$, $u_2 = 0$.
2. $u_1 = 1$, $u_2 = 0$.
3. $u_1 = 0$, $u_2 = 1$.
4. $u_1 = (1-\gamma_1)/(1-\gamma_1\gamma_2)$, $u_2 = (1-\gamma_2)/(1-\gamma_1\gamma_2)$,

если $\gamma_1 > 1$ и $\gamma_2 > 1$, или $\gamma_1 < 1$ и.

Первая точка является неустойчивой, вторая будет устойчивой, если $\gamma_1 < 1$ и $\gamma_2 > 1$, а третья, если $\gamma_1 > 1$ и $\gamma_2 < 1$. Четвертая стационарная точка реализуется и будет устойчивой, если одновременно выполняются неравенства $\gamma_1 < 1$ и $\gamma_2 < 1$. То есть, если внутривидовая конкуренция у популяций слабее межвидовой (γ_2<1 и γ_1<1), то совместное существование популяций будет устойчивым [7].

Тяжелые металлы, выбрасываемые предприятиями в окружающую среду, образуют токсичные для живых организмов вещества. Токсиканты постукают в организмы либо непосредственно, либо по трофическим цепям. Накопление их в организме со временем приводит к внутренним изменениям. В модели предполагается, что изменения метаболизма вызывают понижение плодовитости особей [3]. Предполагается также, что рождаемость особей с увеличением количества токсикантов P уменьшается по гиперболической зависимости

$$R(P) = \frac{1 + a_1 P}{1 + a_2 P},$$

где a_1 и a_2 — положительные параметры такие, что $a_1 < a_2$.

Часть среды обитания при антропогеном давлении может стать недоступной для особей популяции, или часть трофического ресурса может быть уничтожена. Этот фактор в модели учитывается через уменьшение емкости экологической ниши популяции. Уменьшение емкости ниши K происходит по гиперболической зависимости:

$$K(P) = \frac{1 + b_1 P}{1 + b_2 P},$$

где b_1 и b_2 — положительные параметры такие, что $b_1 < b_2$.

С учетом этих предположений модель конкуренции двух популяции (1) в загрязненной зоне сводится к задаче Коши для системы двух дифференциальных уравнений

$$\frac{du_1}{dt} = \mu_1 u_1 \left(\frac{1 + a_{11} P}{1 + a_{12} P} - \frac{1 + b_{11} P}{1 + b_{12} P} u_1 - \gamma_1 u_2 \right),$$
$$\frac{du_2}{dt} = \mu_2 u_2 \left(\frac{1 + a_{21} P}{1 + a_{22} P} - \frac{1 + b_{21} P}{1 + b_{22} P} u_2 - \gamma_2 u_1 \right), \quad (2)$$

где a_{ij} и b_{ij} $(i, j = 1, 2)$ – параметры, удовлетворяющие неравенствам

$$a_{11} \le a_{12},\ a_{21} \le a_{22},\ b_{12} \le b_{11},\ b_{22} \le b_{21}. \quad (3)$$

На параметры γ_1 и γ_2 накладываются ограничения: $0 \le \gamma_1 < 1$, $0 \le \gamma_2 < 1$, тем самым предполагается, что в отсутствие токсикантов ни одна из популяций не гибнет.

При $P = 0$ (токсиканты отсутствуют) эта модель переходит в модель (1). Удельная скорость роста популяций в зависимости от значения P при выполнении условий (3) уменьшается, но не может уменьшиться более чем на величину $\mu_1 a_{11} / a_{12}$ для первой популяции, и на величину $\mu_2 a_{21} / a_{22}$ для второй популяции. Этим учитывается факт ограниченного накопления токсикантов организмами особей популяций и неоднородность накопления внутри самих популяций [3, 4].

Загрязнители среды могут уничтожить часть трофического ресурса или сделать его недоступным для особей популяций. Емкости ниш популяций при выполнении неравенств $b_{11} > b_{12}$ и $b_{21} > b_{22}$ в (2) с увеличением количества загрязнителей будут уменьшаться. Предполагается, что емкость ниши первой популяции не может стать меньше величины b_{11} / b_{12}, а второй — b_{21} / b_{22}. Этим учитывается то обстоятельство, что небольшая часть популяций может выдержать антропогенную нагрузку.

Нетривиальная неподвижная точка системы уравнений (2) определяется через параметры модели:

$$u_1 = \frac{1}{D}\left(\frac{1+b_{21}P}{1+b_{22}P}\frac{1+a_{11}P}{1+a_{12}P} - \gamma_1\frac{1+a_{21}P}{1+a_{22}P}\right), \tag{4}$$

$$u_2 = \frac{1}{D}\left(\frac{1+b_{11}P}{1+b_{12}P}\frac{1+a_{21}P}{1+a_{22}P} - \gamma_2\frac{1+a_{11}P}{1+a_{12}P}\right),$$

где $D = \frac{1+b_{11}P}{1+b_{12}P}\frac{1+b_{21}P}{1+b_{22}P} - \gamma_1\gamma_2$.

Поскольку при $P=0$ эта стационарная точка существует и является устойчивой (поскольку $\gamma_2<1$ и $\gamma_1<1$), то в силу непрерывности правых частей выражений (4) от P, она будет существовать и при малых значениях P.

Собственные значения матрицы Якоби

$$J = \begin{pmatrix} -\mu_1\frac{1+b_{11}P}{1+b_{12}P}u_1 & -\gamma_1\mu_1 u_1 \\ -\gamma_2\mu_2 u_2 & -\mu_2\frac{1+b_{21}P}{1+b_{22}P}u_2 \end{pmatrix}$$

системы уравнений (2) в стационарной точке (4) будут иметь отрицательные вещественные части, если выполняется неравенство

$$D = \frac{1+b_{11}P}{1+b_{12}P}\frac{1+b_{21}P}{1+b_{22}P} - \gamma_1\gamma_2 > 0.$$

Поскольку рассматривается модель, для которой выполняются условия (3), то, соответственно неравенство $D>0$ при $0<\gamma_1<1$ и $0<\gamma_2<1$ будет выполняться. То есть, если стационарная точка (4) реализуется, то она будет устойчивой.

Распределение вероятностей

Реализация математических моделей популяционной биологии возможна во встроенном модуле SIMBIOLOGY среды программировании математического пакета Matlab [8]. Имитационная модель основывается на случайном переборе параметров модели (2) из заданного диапазона значений [9] с учетом соотношений (3). При заданном количестве вариантов выбора параметров строятся вероятности распределения отклонений стационарных значений численностей популяций при антропогенном давлении от естественных значений.

На Рисунке 1 приведены распределения стационарных значений численностей популяций при $\gamma_2 = 0.6$, $\gamma_1 = 0.1$ и $P = 1.5$ для параметров выбранных случайным образом из диапазонов $a_{11} \in (1,2)$, $a_{21} \in (1,2)$, $a_{12} \in a_{11} + (0,1)$, $a_{12} \in a_{11} + (0,1)$, $b_{22} \in (0,1)$, $b_{12} \in (0,1)$, $b_{11} \in b_{12} + (0,1)$, $b_{21} \in b_{22} + (0,1)$. На Рисунке 2 приведено вероятностное распределение численности популяций для 2 000 вариантов выбора параметров системы уравнений (2). Такой вариант выбора параметров обеспечивал выполнение неравенств (3). Пунктирными линиями на Рисунке 1 и Рисунке 2 отмечены стационарные значения численностей популяций для чистой территории. Сплошной линией на Рисунке 1 отмечена граница области, в которой лежат стационарные значения численности популяци0439.

В рассмотренном варианте параметров большие потери несет та популяция, которая в отсутствие токсикантов имеет большую численность (на Рисунке 2 — u_1). Знание реальных параметров, входящих в модель (2), дает возможность прогнозировать степень влияния антропогенной нагрузки на численность популяций для реальных экосистем [10, 11].

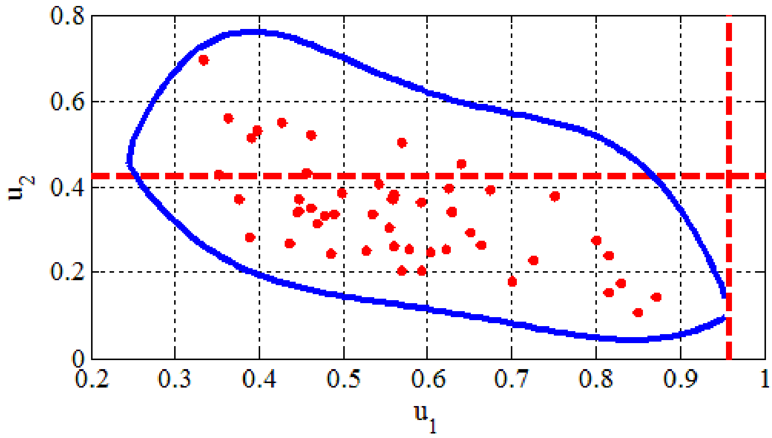

Рисунок 1. Распределения стационарных значений численностей популяций

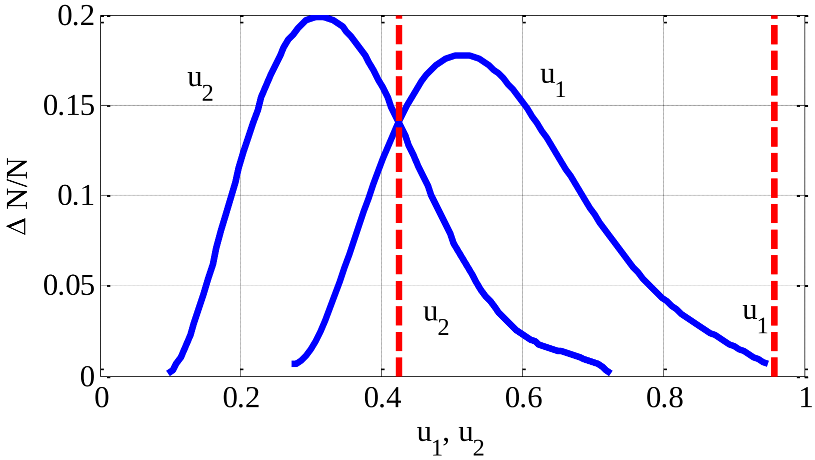

Рисунок 2. Распределение вероятностей численности популяций при антропогенном давлении

Заключение

Таким образом, разработанная модель прогнозирует сдвиг распределений вероятностей в сторону уменьшения численности обеих популяций при наличии токсикантов, по сравнению с их численностью в «чистой» среде. Наибольшие потери численности будут у популяций, которые до антропогенного давления имели большую численность. Численность малочисленных популяций может вырасти за счет уменьшения давления конкурирующих популяций.

Список литературы:

1. Пегов С. А. Антропогенное воздействие на биосферу // Труды Института системного анализа Российской академии наук. 2009. Т. 42. С. 5-32.

2. Шевцова О. В., Добротина Е. Д., Гончарова А. Б., Недашковский А. П. Химические характеристики снежного покрова в высокоширотной арктике (мыс Баранова, остров

Большевик, архипелаг Северная Земля) // Лёд и снег. 2022. Т. 62. №4. С. 564-578. https://doi.org/10.31857/S2076673422040152

3. Моисеенко Т. И. Биодоступность и экотоксичность металлов в водных системах: критические уровни загрязнения // Геохимия. 2019. Т. 64. №7. С. 675-688. https://doi.org/10.31857/S0016-7525647675-688

4. Ивантер Э. В., Медведев Н. В. Экологическая токсикология природных популяций птиц и млекопитающих Севера. М.: Наука, 2007. 229 с.

5. Катаев Г. Д. Воздействие выбросов медно-никелевого предприятия на состояние популяций и сообществ мелких млекопитающих Кольского полуострова // Nature Conservation Research. Заповедная наука. 2017. Т. 2. №Приложение 2. С. 19-27. https://doi.org/10.24189/ncr.2017.033

6. Касиков А. Г. Пылевые выбросы медно-никелевого производства и последствия их воздействия на организм человека в условиях Крайнего Севера // Вестник Кольского научного центра РАН. 2017. №4. С. 58-63.

7. Горыня Е. В., Колпак Е. П., Гасратова Н. А., Гончарова А. Б. Математическая модель иерархической конкуренции // Перспективы науки. 2023. № 8 (167). С. 103-108.

8. Гончарова А. Б., Виль М. Ю. Имитационное моделирование лечения онкологического заболевания с использованием приложения Matlab Simbiology // Моделирование систем и процессов. 2021. Т. 14. №3. С. 90-96. https://doi.org/10.12737/2219-0767-2021-14-3-90-96

9. Гончарова А. Б. Постановка предварительного медицинского диагноза на основе теории нечетких множеств с использованием меры Сугено // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2019. №4. С. 529-543. https://doi.org/10.21638/11702/spbu10.2019.409

10. Даувальтер В. А., Кашулин Н. А. Прогнозирование долговременных изменений пресноводных региональных систем рыбного хозяйства Арктики // Вестник Мурманского государственного технического университета. 2012. Т. 15. №1. С. 171-180.

11. Кривополенова С. Д., Гончарова А. Б. Первичный анализ данных для построения системы поддержки принятия решений // Процессы управления и устойчивость. 2019. Т. 6. №1. С. 250-254.

References:

1. Pegov, S. A. (2009). Antropogennoe vozdeistvie na biosferu. *Trudy Instituta sistemnogo analiza Rossiiskoi akademii nauk, 42*, 5-32. (in Russian).

2. Shevtsova, O. V., Dobrotina, E. D., Goncharova, A. B., & Nedashkovskii, A. P. (2023). Khimicheskie kharakteristiki snezhnogo pokrova v vysokoshirotnoi Arktike (mys Baranova, ostrov Bol'shevik, arkhipelag Severnaya Zemlya). *Led i Sneg*, *62*(4), 564-578. (in Russian). https://doi.org/10.31857/S2076673422040152

3. Moiseenko, T. I. (2019). Biodostupnost' i ekotoksichnost' metallov v vodnykh sistemakh: kriticheskie urovni zagryazneniya. *Geokhimiya, 64*(7), 675-688. (in Russian). https://doi.org/10.31857/S0016-7525647675-688

4. Ivanter, E. V., & Medvedev, N. V. (2007). Ekologicheskaya toksikologiya prirodnykh populyatsii ptits i mlekopitayushchikh Severa. Moscow. (in Russian).

5. Kataev, G. D. (2017). Vozdeistvie vybrosov medno-nikelevogo predpriyatiya na sostoyanie populyatsii i soobshchestv melkikh mlekopitayushchikh Kol'skogo poluostrova. *Nature Conservation Research. Zapovednaya nauka, 2*(Prilozhenie 2), 19-27. (in Russian). https://doi.org/10.24189/ncr.2017.033

6. Kasikov, A. G. (2017). Pylevye vybrosy medno-nikelevogo proizvodstva i posledstviya ikh vozdeistviya na organizm cheloveka v usloviyakh Krainego Severa. *Vestnik Kol'skogo nauchnogo tsentra RAN*, (4), 58-63. (in Russian).

7. Gorynya, E. V., Kolpak, E. P., Gasratova, N. A., & Goncharova, A. B. (2023). Matematicheskaya model' ierarkhicheskoi konkurentsii. *Perspektivy nauki*, *8*(167), 103-108. (in Russian).

8. Goncharova, A. B., & Vil', M. Yu. (2021). Imitatsionnoe modelirovanie lecheniya onkologicheskogo zabolevaniya s ispol'zovaniem prilozheniya Matlab Simbiology. *Modelirovanie sistem i protsessov*, *14*(3), 90-96. (in Russian). https://doi.org/10.12737/2219-0767-2021-14-3-90-96

9. Goncharova, A. B. (2019). Postanovka predvaritel'nogo meditsinskogo diagnoza na osnove teorii nechetkikh mnozhestv s ispol'zovaniem mery Sugeno. *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Prikladnaya matematika. Informatika. Protsessy upravleniya*, (4), 529-543. (in Russian). https://doi.org/10.21638/11702/spbu10.2019.409

10. Dauval'ter, V. A., & Kashulin, N. A. (2012). Prognozirovanie dolgovremennykh izmenenii presnovodnykh regional'nykh sistem rybnogo khozyaistva Arktiki. *Vestnik Murmanskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta*, *15*(1), 171-180. (in Russian).

11. Krivopolenova, S. D., & Goncharova, A. B. (2019). Pervichnyi analiz dannykh dlya postroeniya sistemy podderzhki prinyatiya reshenii. *Protsessy upravleniya i ustoichivost'*, *6*(1), 250-254. (in Russian).

Работа поступила в редакцию 12.08.2024 г.

Принята к публикации 18.08.2024 г.

Ссылка для цитирования:

Колпак Е. П. Математическая модель конкуренции популяций на загрязненной территории // Бюллетень науки и практики. 2024. Т. 10. №9. С. 10-16. https://doi.org/10.33619/2414-2948/106/01

Cite as (APA):

Kolpak, E. (2024). A Mathematical Model of Population Competition in a Polluted Area. *Bulletin of Science and Practice*, *10*(9), 10-16. (in Russian). https://doi.org/10.33619/2414-2948/106/01