УДК 517.928 https://doi.org/10.33619/2414-2948/105/02

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ДВУХТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С ОСОБЫМИ ТОЧКАМИ

©Турсунов Д. А., *ORCID: 0000-0002-6990-1742, SPIN-код: 5814-2747, Scopus: 57191858044, д-р физ.-мат. наук, Ошский государственный университет, г. Ош, Кыргызстан, dtursunov@oshu.kg*
©Бекмурза уулу Ы., *ORCID: 0000-0002-6990-1742, SPIN-код: 8678-8478, Ошский государственный университет, г. Ош, Кыргызстан, dtursunov@oshu.kg*

ASYMPTOTICS OF THE SOLUTION OF A TWO-POINT BUNDARY-VALUE PROBLEM WITH SINGLE POINTS

©Tursunov D., *ORCID: 0000-0002-6990-1742, SPIN-code: 5814-2747, Scopus: 57191858044, Dr. habil., Osh State University, Osh, Kyrgyzstan, dtursunov@oshu.kg*
©Bekmurza uulu Y., *ORCID: 0000-0002-6990-1742, SPIN-code: 5814-2747, Osh State University, Osh, Kyrgyzstan, ybekmurzauulu@oshu.kg*

Аннотация. Во многих областях науки сложные задачи описываются дифференциальными уравнениями с малым параметром. Одному известному физику приписывается фраза: «Явление не является физическим, если в нем отсутствует малый параметр». Дифференциальное уравнение (обыкновенные или в частных производных) с малым параметром при старшей производной называют сингулярно возмущенным дифференциальным уравнением. Такие уравнения возникают в электротехнике и радиотехнике, механике, гидра- и аэродинамике и т.д. Статья посвящена построению полного разложения решения сингулярно возмущенной двухточечной краевой задачи с двумя особыми точками на границах рассматриваемого отрезка. Решение ищется в виде суммы трех функций, которые представимы асимптотическими рядами. На прямую невозможно построить равномерное асимптотическое разложение, поэтому вводится вспомогательная функция, с помощью которой удается построить асимптотику на всем отрезке включая особые точки.

Abstract. In many areas of science, complex problems are described by differential equations with a small parameter. One famous physicist is credited with the phrase: “A phenomenon is not physical if it lacks a small parameter.” A differential equation (ordinary or partial differential) with a small parameter at the highest derivative is called a singularly perturbed differential equation. Such equations arise in electrical and radio engineering, mechanics, hydraulic and aerodynamics, etc. The article is devoted to the construction of a complete expansion of the solution to a singularly perturbed two-point boundary value problem with two singular points on the boundaries of the segment under consideration. The solution is sought in the form of a sum of three functions that can be represented by asymptotic series. It is impossible to construct a uniform asymptotic expansion on a straight line, so an auxiliary function is introduced, with the help of which it is possible to construct an asymptotic expansion on the entire segment, including singular points.

Ключевые слова: обыкновенное дифференциальное уравнение, сингулярное возмущение, пограничный слои, особая точка.

Keywords: ordinary differential equation, singularly perturbed, boundary layer, singular point.

Постановка задачи. Исследуем двухточечную сингулярно возмущенную краевую задачу:

$$\varepsilon y''(x)+x(1-x)y'(x)-y(x)=f(x),\ 0\le x\le 1, \tag{1}$$

$$y(0)=0,\ y(1)=0, \tag{2}$$

где ε — малый параметр, $f\in C^{\infty}[0,1]$.

Особенность исследуемой задачи заключается в том, что сингулярно возмущенное уравнение (1) при $\varepsilon\to 0$ имеет две особые точки $x=0$ и $x=1$.

Требуется получить асимптотику решения задачи (1)-(2) на всем отрезке включая особые точки, при стремлении малого параметра к нулю.

Решение задачи. Умножая обе части уравнения (1) на выражение $e^{-\frac{x^2(3-2x)}{6\varepsilon}}$ имеем:

$$y''(x)-\frac{x(1-x)}{\varepsilon}y'(x)-\frac{1}{\varepsilon}y(x)=\frac{f(x)}{\varepsilon},\quad |\ e^{-\frac{x^2(3-2x)}{6\varepsilon}}$$

$$\left(e^{-\frac{x^2(3-2x)}{6\varepsilon}}y'\right)'-\frac{1}{\varepsilon}e^{-\frac{x^2(3-2x)}{6\varepsilon}}y(x)=\frac{f(x)}{\varepsilon}e^{-\frac{x^2(3-2x)}{6\varepsilon}}.$$

Из Справочника по обыкновенным дифференциальным уравнениям следует, что для решения задачи (1)-(2) справедливо оценка [1]:

$$|y(x)|\le\frac{F}{A},\ \text{где}\ F=\max_{x\in[0,1]}\left|\frac{f(x)}{\varepsilon}e^{-\frac{x^2(3-2x)}{6\varepsilon}}\right|,\ A=\min_{x\in[0,1]}\left|e^{-\frac{x^2(3-2x)}{6\varepsilon}}\right|.$$

Рассмотрим соответствующее невозмущенное дифференциальное уравнение первого порядка:

$$x(1-x)y'_0(x)-y_0(x)=f(x).$$

Умножая обе части последнего равенства на интегрирующий множитель $\frac{1}{x^2}$ получаем:

$$\frac{1-x}{x}y'_0(x)-\frac{1}{x^2}y_0(x)=\frac{f(x)}{x^2},$$

полученное равенство можно записать в виде:

$$\left(y_0(x)\frac{1-x}{x}\right)'=\frac{f(x)}{x^2}.$$

Интегрируя последнее равенство от x_0 до x имеем:

$$y_0(x)\frac{1-x}{x}-y_0(x_0)\frac{1-x_0}{x_0}=\int_{x_0}^{x}\frac{f(s)}{s^2}ds.$$

Выражая полученное соотношение через $y_0(x)$ получим:

$$y_0(x)=\frac{x}{1-x}\left(y_0(x_0)\frac{1-x_0}{x_0}+\int_{x_0}^{x}\frac{f(s)}{s^2}ds\right).$$

Нетрудно заметить, что полученная функция имеет две особые точки x=0 и x=1. То, что и следовало ожидать. И здесь мы выберем точку x_0 так чтобы один из этих особых точек была устранимой особой точкой.

Пусть x_0=1, тогда имеем $y_0(x)=\frac{x}{1-x}\int_1^x\frac{f(s)}{s^2}ds$.

Интегрируя интеграл в правой части последнего равенства по частям можно доказать, что теперь точка x_0=1 устранимая особая точка, а точка x=0 остается особой точкой типа полюса:

$$y_0(x)=\frac{x}{1-x}\int_1^x\frac{f(s)}{s^2}ds=-\frac{x}{1-x}\int_1^x f(s)d\frac{1}{s}=$$

$$=-\frac{1}{1-x}\big(f(x)-xf(1)\big)+\frac{x}{1-x}\int_1^x f'(s)d\ln|s|=$$

$$-\frac{1}{1-x}\big(f(x)-xf(1)\big)+\frac{f'(x)}{1-x}x\ln|x|+$$

$$-\frac{x}{1-x}\int_1^x f''(s)\ln|s|ds.$$

Рассмотрим левую часть уравнения (1) при $x=\varepsilon^{\alpha}t$, где 0<α=const, t — новая переменная, т.е. в окрестности нуля x=0: $\varepsilon^{1-2\alpha}y''(t)+t(1-\varepsilon^{\alpha}t)y'(t)-y(t)$

если α=1/2, то имеем $y''(t)+ty'(t)-y(t)-\varepsilon^{1/2}t^2y'(t)$

а если α=1/3, то имеем $\varepsilon^{1/3}y''(t)-\varepsilon^{1/3}t^2y'(t)+ty'(t)-y(t)$

А если рассмотреть левую часть уравнения (1) при $1-x=\varepsilon^{\alpha}t$, т.е. в окрестности точки единицы, x=1: $\varepsilon^{1-2\alpha}y''(t)-(1-\varepsilon^{\alpha}t)t\,y'(t)-y(t)$.

если α=1/2, то имеем $y''(t)-ty'(t)-y(t)+\varepsilon^{1/2}t^2y'(t)$

а если α=1/3, то имеем $\varepsilon^{1/3}y''(t)+\varepsilon^{1/3}t^2y'(t)-ty'(t)-y(t)$.

Асимптотическое решение краевой задачи (1)-(2) ищем в виде суммы трех рядов:

$$y(x)=u(x)+v(\tau)+w(\eta) \tag{3}$$

где

$$u(x)=u_0(x)+\varepsilon u_1(x)+\varepsilon^2u_2(x)+\ldots \tag{4}$$

$$v(\tau)=v_0(\tau)+\mu v_1(\tau)+\mu^2 v_2(\tau)+\dots \tag{5}$$

$$w(\eta)=w_0(\eta)+\lambda w_1(\eta)+\lambda^2 w_2(\eta)+\dots \tag{6}$$

$x=\mu\tau,\ \mu=\sqrt{\varepsilon},\ 1-x=\varepsilon^{\beta}\eta$.

Подставляя соотношение (3) в уравнение (1) получаем:

$$\varepsilon u''(x)+x(1-x)u'(x)-u(x)=f(x)-h(x), \tag{7}$$

$$v''(\tau)+\tau v'(\tau)-v(\tau)-\mu\tau^2 v'(\tau)=h(\tau), \tag{8}$$

$$w''(\eta)-\eta w'(\eta)-w(\eta)+\mu\eta^2 w'(\eta)=0, \tag{9}$$

где

$$h(x)=h_0(x)+\varepsilon h_1(x)+\varepsilon^2 h_2(x)+\dots, \tag{10}$$

$h_k(x)$ — пока неизвестные функций [2-10].

Подставляя (4) в (7) и по идее метода малого параметра имеем:

$$x(1-x)u'_0(x)-u_0(x)=f(x)-h_0(x), \tag{11}$$

$$x(1-x)u'_k(x)-u_k(x)=-u''_{k-1}(x)-h_k(x), k\in N \tag{12}$$

Уравнений (11) и (12) будем интегрировать так чтобы точка x=1 была устранимой:

$$u_0(x)=\frac{x}{1-x}\int_1^x\frac{f(s)-h_0(s)}{s^2}ds,$$

как и в предыдущих работах [2-10], неизвестную функцию $h_0(x)$ выберем так чтобы $u_0\in C^{\infty}[0,1]$.

Пусть $h_0(x)=f'(0)x$, тогда $u_0\in C^{\infty}[0,1]$.

Действительно,

$$u_0(x)=\frac{x}{1-x}\int_1^x\frac{f(s)-f'(0)s}{s^2}ds=\frac{x}{1-x}\int_1^x\frac{f(0)+s^2F(s)}{s^2}ds=$$

$$=-\frac{x}{1-x}\int_1^x\left(f(0)+s^2F(s)\right)d\frac{1}{s}=-f(0)+\frac{F(1)-x^2F(x)}{1-x}+\frac{2x}{1-x}\int_1^x F(s)ds.$$

Аналогично определяются все $h_k(x)$, k=1,2,… так чтобы $u_k\in C^{\infty}[0,1], k\in N$.

Не сложно заметить. что при $h_k(x)=-u'''_{k-1}(0)x$ мы достигнем своей цели.

Здесь мы определили все члены рядов (4) и (10).

Перейдем теперь к рассмотрению уравнения (8). Учитывая соотношения (5) и (10) имеем:

$$v''_0(\tau)+\tau v'_0(\tau)-v_0(\tau)=f'(0)\mu\tau,$$
$$v''_{2k-1}(\tau)+\tau v'_{2k-1}(\tau)-v_{2k-1}(\tau)=\tau v'_{2k-2}(\tau),$$
$$v''_{2k}(\tau)+\tau v'_{2k}(\tau)-v_{2k}(\tau)=h_k(\tau)+\tau v'_{2k-1}(\tau).$$

Из краевых условий (2) и свойств пограничных функций следует, что:

$$v_{2k}(0)=-u_k(0),\ v_{2k+1}(0)=0,\ \underset{\tau\to\infty}{v_k}(\tau)=0,\ k=0,1,2...$$

Как нам известно, соответствующее однородное уравнение $z''(t)+tz'(t)-z(t)=0$ имеет два независимых решений:

$$z_1(t)=t,\ z_2(t)=e^{-t^2/2}+t\int_\infty^t e^{-\tau^2/2}d\tau,$$

где $z_2(t)=\begin{cases}1-c_1t+c_2t^2+..., & t\to 0\\ \dfrac{1}{t^2}e^{-t^2/2}(1-\dfrac{3}{t^2}+\dfrac{1\cdot 3\cdot 5}{t^4}+...+(-1)^{n+1}\dfrac{(2n+1)!!}{t^{2n}}+...), & t\to\infty,\end{cases}$

вронскиан: $W(z_1,z_2)=-e^{-t^2/2}$.

Поэтому решение задачи

$$v''_0(\tau)+\tau v'_0(\tau)-v_0(\tau)=f'(0)\mu\tau,\tau\in[0,\infty),v_0(0)=-u_0(0),\ \underset{\tau\to\infty}{v_0}(\tau)=0$$

существует, единственно и можно записать в виде

$$v_0(\tau)=-\mu z_2(\tau)f'(0)\int_0^\tau z_1(s)se^{s^2/2}ds+\mu z_1(\tau)\int_\infty^\tau z_2(s)se^{s^2/2}ds-u_0(0)z_2(\tau).$$

Аналогично определяются остальные члены ряда (5).

Перейдем к определению членов последнего ряда (6). Подставляя ряд (6) в уравнению (9) имеем:

$$w''_0(\eta)-\eta w'_0(\eta)-w_0(\eta)=0,\eta\in[0,\infty), \tag{13}$$
$$w''_k(\eta)-\eta w'_k(\eta)-w_k(\eta)=-\eta^2 w'_{k-1}(\eta),\ \eta\in[0,\infty),\ k\in N.$$

Аналогично, из краевых условий (2) и свойств пограничных функций следует, что:

$$w_{2k}(0)=-u_k(1),\ w_{2k+1}(0)=0,\ \underset{\eta\to\infty}{w_k}(\eta)=0,\ k=0,1,2... \tag{14}$$

Однородное уравнение $w''_0(\eta)-\eta w'_0(\eta)-w_0(\eta)=0$ имеет независимые решения $w_{0,1}(\eta)=e^{\eta^2/2}$, $w_{0,2}(\eta)=e^{\eta^2/2}\int_\infty^\eta e^{-s^2/2}ds$, вронскиан $W(w_{0,1},w_{0,2})=e^{\eta^2/2}$ [ ].

Поэтому решение задачи

$$w''_0(\eta)-\eta w'_0(\eta)-w_0(\eta)=0,\eta\in[0,\infty),$$
$$w_0(0)=-u_0(1),\ \underset{\eta\to\infty}{w_0}(\eta)=0,$$

существует, единственно и представимо в виде:

$$w_0(\eta)=-\frac{2}{\sqrt{\pi}}u_0(0)e^{\eta^2/2}\int_{\infty}^{\eta}e^{-s^2/2}ds\,.$$

А неоднородное уравнение $z''(\eta)-\eta z'(\eta)-z(\eta)=f(\eta),\ \eta\in[0,\infty),$

с краевыми условиями $z(0)=A,\ \lim\limits_{\eta\to\infty}z(\eta)=0$ имеет решение

$$z(\eta)=\frac{2A}{\sqrt{\pi}}w_{0,2}(\eta)-w_{0,1}(\eta)\int_0^{\eta}f(s)\int_{\infty}^{s}e^{-\tau^2/2}d\tau ds+w_{0,2}(\eta)\int_0^{\eta}f(s)ds\,.$$

Используя последнее соотношение сможем записать решения задач (15)-(16).

Таким образом нами определены все члены рядов (4), (5) и (6). Тем самым все слагаемые функций в (3).

Нами доказана теорема.

Теорема. Для решения сингулярно возмущенной краевой задачи (1)-(2) на отрезке $x\in[0,1]$ при стремлении малого параметра к нулю справедливо разложение

$$y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k u_k(x)+\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^{k/2}(v_k(\tau)+w_k(\eta))\cdot$$

Список литературы:

1. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1971. 576 с.

2. Tursunov D. A., Bekmurza uulu Y. Asymptotic Solution of the Robin Problem with a Regularly Singular Point // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2021. V. 42. №3. P. 613-620. https://doi.org/10.1134/S1995080221030185

3. Tursunov D., Kozhobekov K., uulu Ybadylla B. Asymptotics of Solutions of Boundary Value Problems for the Equation εy''+ xp (x) y'-q (x) y= f // Eurasian Mathematical Journal. 2022. V. 13. №3. P. 82-91.

4. Турсунов Д., Уулу Ы. Б. Асимптотики решения возмущенной задачи с регулярной особой точкой // Вестник Ошского государственного университета. 2022. №1. С. 159-166..

5. Kozhobekov K. G., Erkebaev U. Z., Tursunov D. A. Asymptotics of the solution to the boundary-value problems when limited equation has singular point // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2020. V. 41. P. 96-101.

6. Kozhobekov K. G., Erkebaev U. Z., Tursunov D. A. Asymptotics of the solution to the boundary-value problems when limited equation has singular point // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2020. Т. 41. № 1. С. 96-101. https://doi.org/10.1134/S1995080220010138

7. Tursunov D. A. Asymptotics of the cauchy problem solution in the case of instability of a stationary point in the plane of "rapid motions" // Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics. 2018. № 54. С. 46-57.

8. Tursunov D. A. Asymptotics of the cauchy problem solution in the case of instability of a stationary point in the plane of" rapid motions" // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2018. №54. С. 46-57.

9. Турсунов Д. А. Асимптотика решения бисингулярно возмущенного эллиптического уравнения. Случай особой точки на границе //Известия Томского политехнического университета. Инжиниринг георесурсов. 2014. Т. 324. №2. С. 31-35. https://doi.org/10.17223/19988621/54/4

10. Бекмурза уулу Ы. Сингулярно возмущенная задача Дирихле с особой точкой //

Вестник Ошского государственного университета. 2024. №24. С. 354-360.\

References:

1. Kamke, E. (1971). Spravochnik po obyknovennym differentsial'nym uravneniyam. Moscow. (in Russian).
2. Tursunov, D. A., & Bekmurza uulu, Y. (2021). Asymptotic Solution of the Robin Problem with a Regularly Singular Point. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, *42*(3), 613-620. https://doi.org/10.1134/S1995080221030185
3. Tursunov, D., Kozhobekov, K., & uulu Ybadylla, B. (2022). Asymptotics of Solutions of Boundary Value Problems for the Equation εy''+ xp (x) y'-q (x) y= f. *Eurasian Mathematical Journal*, *13*(3), 82-91.
4. Bekmurza uulu, Ybadylla, & Tursunov, D. A. (2022). Asimptotiki resheniya vozmushchennoi zadachi s regulyarnoi osoboi tochkoi. *Vestnik Oshskogo gosudarstvennogo universiteta, 1*(1), 159-166. (in Russian).
5. Kozhobekov, K. G., Erkebaev, U. Z., & Tursunov, D. A. (2020). Asymptotics of the solution to the boundary-value problems when limited equation has singular point. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, *41*, 96-101.
6. Kozhobekov, K. G., Erkebaev, U. Z., & Tursunov, D. A. (2020). Asymptotics of the solution to the boundary-value problems when limited equation has singular point. *Lobachevskii Journal of Mathematics, 41*(1), 96-101. https://doi.org/10.1134/S1995080220010138
7. Tursunov, D. A. (2018). Asymptotics of the cauchy problem solution in the case of instability of a stationary point in the plane of "rapid motions". *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika,* (54), 46-57.
8. Tursunov, D. A. (2014). Asimptotika resheniya bisingulyarno vozmushchennogo ellipticheskogo uravneniya. Sluchai osoboi tochki na granitse. *Izvestiya Tomskogo politekhnicheskogo universiteta. Inzhiniring georesursov, 324*(2), 31-35.
9. Tursunov, D. A. (2014). Asimptotika resheniya bisingulyarno vozmushchennogo ellipticheskogo uravneniya. Sluchai osoboi tochki na granitse. *Izvestiya Tomskogo politekhnicheskogo universiteta. Inzhiniring georesursov, 324*(2), 31-35. (in Russian). https://doi.org/10.17223/19988621/54/4
10. Bekmurza uulu, Y. (2024). Singulyarno vozmushchennaya zadacha Dirikhle s osoboi tochkoi. *Vestnik Oshskogo gosudarstvennogo universiteta,* (24), 354-360. (in Russian).

Работа поступила в редакцию 06.07.2024 г.

Принята к публикации 12.07.2024 г.

Ссылка для цитирования:

Турсунов Д. А., Бекмурза уулу Ы. Асимптотика решения двухточечной краевой задачи с особыми точками // Бюллетень науки и практики. 2024. Т. 10. №8. С. 20-26. https://doi.org/10.33619/2414-2948/105/02

Cite as (APA):

Tursunov, D., & Bekmurza uulu, Y. (2024). Asymptotics of the Solution of a Two-Point Bundary-Value Problem with Single Points. *Bulletin of Science and Practice, 10*(8), 20-26. (in Russian). https://doi.org/10.33619/2414-2948/105/02