ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ / PHYSICAL & MATHEMATICAL SCIENCES

УДК 517.928 https://doi.org/10.33619/2414-2948/104/01

РАСШИРЕНИЕ ОБЛАСТЕЙ ПРИТЯЖЕНИЙ РЕШЕНИЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ УРАВНЕНИЙ

©**Мусакулова Н. К.,** *ORCID: 0009-0002-8805-331X, SPIN-код: 4710-0522, Жалал-Абадский государственный университет, г. Джалал-Абад, Кыргызстан, kuralbekovna79@inbox.ru*

EXPANDING THE AREAS OF ATTRACTION OF SOLUTIONS TO SINGULARLY PERTURBED EQUATIONS

©**Musakulova N.,** *ORCID: 0009-0002-8805-331X, SPIN-code: 4710-0522, Jalal-Abad State University Kyrgyzstan, Jalal-Abad, Kyrgyzstan, kuralbekovna79@inbox.ru*

Аннотация. Рассматривается сингулярно возмущенное уравнение первого порядка, введено понятие области притяжения (ОП) решения сингулярно возмущенного уравнения к решению невозмущенного уравнения и доказано существование ОП. Поставлена задача о возможности расширения областей притяжения решений СВУ. Доказано, если существует область притяжения, то его можно расширить до границы рассматриваемой области. При доказательстве были использованы геометрические построения, с использованием линии уровней сопряженных-гармонических функций, метод последовательных приближений и методы асимптотических оценок

Abstract. In this paper, a singularly perturbed equation of the first order is considered, the concept of a region of attraction (DO) of the solution of a singularly perturbed equation to the solution of an unperturbed equation is introduced, and the existence of an OA is proved. The problem has been set about the possibility of expanding the areas of attraction of VCA solutions. It has been proven that if there is a region of attraction, then it can be expanded to the boundary of the region under consideration. In the proof, geometric constructions were used, using the level line of conjugate-harmonic functions, the method of successive approximations and methods of asymptotic estimates.

Ключевые слова: сингулярно возмущенные уравнения, аналитические функции, область притяжения, гармонические функции, линии уровня, сходимость, последовательные приближения, асимптотическая оценка, область.

Keywords: singularly perturbed equations, analytic functions, attraction region, harmonic functions, level lines, convergence, successive approximations, asymptotic estimate, region.

Объект исследования и постановка задачи.

Пусть рассматривается уравнение

$$\varepsilon x'(t,\varepsilon) = a(t)x(t,\varepsilon) + \varepsilon\Big(\varphi(t) + f\big(t, x(t,\varepsilon)\big)\Big), \tag{1}$$

с начальным условием

$$x(t_0,\varepsilon) = x^0 \tag{2}$$

где $0 < \varepsilon -$ малый вещественный параметр; $x(t, \varepsilon)$ — неизвестная скалярная функция; $t \in D \subset C -$ множество комплексных чисел, а $D -$ односвязная, ограниченная область [5].

Пусть выполняются условия:

У1. $a(t), \varphi(t) \in Q(D) -$ пространство аналитических функций в D.

У2. $\forall t \in D \ (a(t) \neq 0)$.

У3. $f(t, 0) \equiv 0, f(t, x) \in Q(H), H = \{(t, x), t \in D, |x| \leq M_0\}$.

У4. $\forall \left((t, \tilde{x})_0, (t, \tilde{x})\right) \in H\left(\left|f(t, \tilde{x}) - f\left(t, \tilde{\tilde{x}}\right)\right| \leq M_1 \left|\tilde{x} - \tilde{\tilde{x}}\right|\right)$.

Здесь и далее буквами $M_0, M_1, \ldots$ обозначим положительных постоянных, не зависящих от ε.

Задача. При сделанных предположениях исследовать асимптотическое поведение решения задачи (1)-(2) в области D.

Поставленная задача исследована в работах [1–4].

При решении поставленной задачи основное внимание уделено доказательству существования областей притяжения решения задачи (1) - (2) к решению невозмущенного уравнения. Невозмущенное уравнение получается из (1) при $\varepsilon = 0$. В рассматриваемом случае невозмущенное уравнение имеет решение $\xi(t) \equiv 0$.

Таким образом, задача заключается в доказательстве соотношения

$$\exists D_0 \subset D(t_0 \in D_0) \wedge \forall t \in D_0 \left(\lim_{\varepsilon \to 0} x(t, \varepsilon) = 0\right).$$

Определение 1. Если существуют области $D_0 \subset D$ и $x(t, \varepsilon) -$ решение задачи (1)-(2) определенное в D_0 и выполняется соотношение $t_0 \in D_0(x(t, \varepsilon) \to 0 \text{ по } \varepsilon)$ то D_0 называется областью притяжения и решения $x(t, \varepsilon)$ к решению $\xi(t) \equiv 0$ невозмущенного уравнения.

В работах [3-4] решены такие задачи и другие, связанные с ОП, но вопрос о расширении границы D_0 не исследован. В данной работе доказано, если существует ОП, то его можно расширить до границы области D.

Решение задачи

Решение задачи разделим на две части:

1. Геометрическая. 2. Аналитическая.

В первой части с использованием линии уровней некоторых сопряженных гармонических функций проведем геометрические построения. Во второй части решим задачу о расширении областей притяжения.

Геометрические построения.

Введем в рассмотрение функцию

$$A(t) = \int_{t_0}^{t} a(\tau) d\tau.$$

Согласно У1 $A(t) \in Q(D)$. Определим функции $ReA(t), ImA(t)$. Далее, при геометрических построениях, используем линии уровня этих функций.

Определение 2. Множества

$$(p) = \{t \in D, ReA(t) = p - const\},$$
$$(q) = \{t \in D, ImA(t) = q - const\},$$

соответственно назовем линиями уровня функций $ReA(t), ImA(t)$.

Согласно У2 функция $A(t)$ в области D не имеет кратных нулей. Следовательно функции $ReA(t), ImA(t)$ в D не имеют разветвляющиеся линии уровня.

Таким образом, через любую точку области D проходит единственная линия уровня функций $ReA(t), ImA(t)$. Если учесть, линии уровня функций $ReA(t), ImA(t)$ проходящие через заданную точку, взаимно ортогональны, то область D покрывается сетью взаимно ортогональных линий уровней $ReA(t)$ и $ImA(t)$ (Рисунок 1) [5].

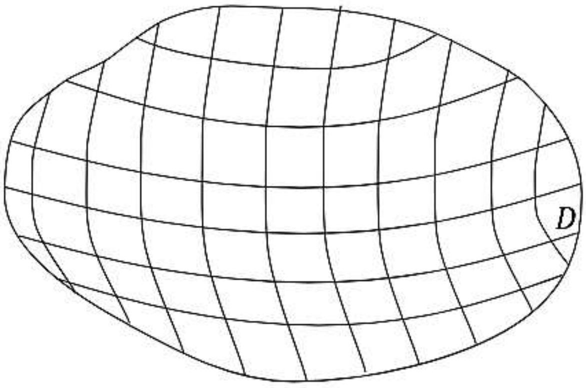

Рисунок 1. Покрытие области D

Линии уровня проходящие через точку t_0 обозначим

$$(p_0) = \{t \in D, ReA(t) = 0\},$$
$$(q_0) = \{t \in D, ImA(t) = 0\}.$$

Линия p_0 разделяет область D на две части, которые обозначим D_1, D_2. Функцию $ReA(t)$ рассмотрим вдоль линии q_0. Вдоль линии p_0 функция $ReA(t)$ строго монотонна и $ReA(t) = 0$. Тогда справедливы одна из следующих соотношений:

$$\forall t \in D_1 \; (ReA(t) \leq 0) \wedge \forall t \in D_2 \; (ReA(t) \geq 0), \tag{3}$$

$$\forall t \in D_1 \; (ReA(t) \geq 0) \wedge \forall t \in D_2 (\; ReA(t) \leq 0). \tag{4}$$

Причем равенство выполняется только на границе (p_0).

Поскольку соотношения (3), (4) равноправны, для определенности, будем считать, что выполняется (3) (Рисунок 2).

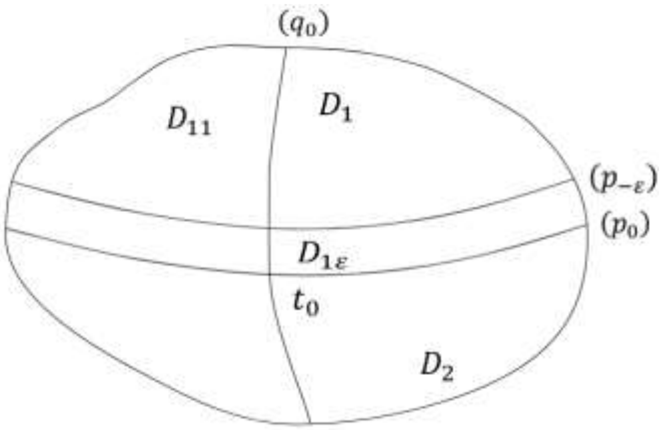

Рисунок 2. Области $D_1, D_2, D_{11}, D_{1\varepsilon}$

Определим линию уровня

$$p_{-\varepsilon} = \{\forall t \in D_1, ReA(t) = \varepsilon ln\varepsilon\}$$

область ограниченный $(p_0), (p_{-\varepsilon})$ обозначим $D_{1\varepsilon}$, а $D_1 \backslash D_{1\varepsilon} = D_{11}$, причем будем считать $(p_{-\varepsilon}) \in D_{11}$ (Рисунок 3).

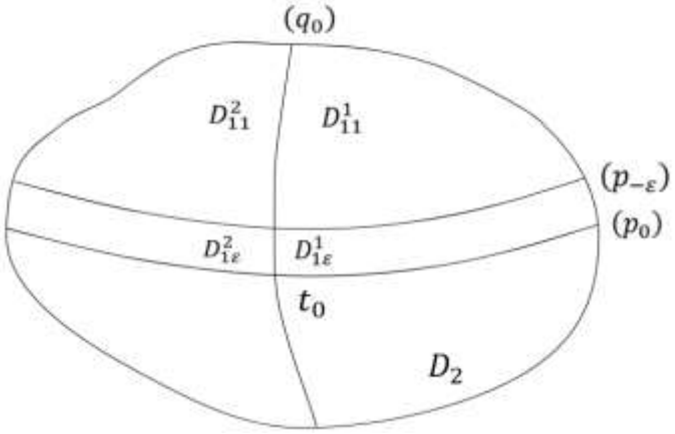

Рисунок 3. Области $\mathrm{D}_{1\varepsilon}^1, \mathrm{D}_{1\varepsilon}^2, \mathrm{D}_{11}^1, \mathrm{D}_{11}^2$

2) Линия (q_0)области $D_{1\varepsilon}, D_{11}$ разделяет га части $D_{1\varepsilon}^1, D_{1\varepsilon}^2, D_{11}^1, D_{11}^2$ (рис. 3).

Аналитическая часть

Аналитическая часть состоит из двух частей.

1. Доказательство существования ОП методом последовательных приближений.

Задачу (1)-(2) заменим следующим (для удобства аргументы неизвестной функции будем опускать)

$$x = x^0 exp\frac{A(t)}{\varepsilon} + \int_{t_0}^{t} [\varphi(\tau) + f(\tau, x)] exp\frac{A(t) - A(\tau)}{\varepsilon} d\tau, \tag{5}$$

$$A(t) = \int_{t_0}^{t} a(\tau) d\tau.$$

К (5) применить метод последовательных приближений, которые определим следующим образом

$$x_m = x^0 exp\frac{A(t)}{\varepsilon} + \int_{t_0}^{t} [\varphi(\tau) + f(\tau, x_{m-1})] exp\frac{A(t) - A(\tau)}{\varepsilon} d\tau, \tag{6}$$

$$x_0 \equiv 0, m = 1, 2, \dots \quad .$$

(6) рассмотрим для $t \in D_{1\varepsilon}^1 \cup D_{11}^1$. Случай $t \in D_{1\varepsilon}^2 \cup D_{11}^2$ рассматривается анологично. Выберем пути интегрирования. Путь, для всех (6), состоит из части: $(p_0)[t_0, \tilde{t}], (q)[\tilde{t}, t]$.

Оценку (6) проведем для следующих случаев:

$$a_1)\ t \in (p_0) \qquad a_2)\ t \in D_{1\varepsilon} \qquad a_3)\ t \in D_{11}^1.$$

Пусть рассматривается случай $a_1)$. Поскольку (p_0)является аналитической кривой [6], то используем её параметрическое представление $t_1 = t_1(s), t_2 = t_2(s), 0 \leq s \leq s_0$ и s – длина (p_0) от точки t_0 до t. С учетом выбранного пути интегрирования (6) представим в виде

$$x_m = x^0 exp\frac{A(t(s))}{\varepsilon} + \tag{7}$$

$$+\int_0^s \left[\varphi\big(\tau(\tilde{s})\big)+f(\tau(\tilde{s}),x)\right] exp\frac{A\big(t(s)\big)-A\big(\sigma(\tilde{s})\big)}{\varepsilon}(\tau_1'(\tilde{s})+i\tau_2'(\tilde{s}))d\tilde{s}$$

$$x_0\equiv 0, m=1,2,\ldots$$

Введем обозначения $A_0(\tilde{s})\equiv A\big(\tau(\tilde{s})\big), \varphi_0(\tilde{s})\equiv\varphi\big(\tau(\tilde{s})\big)\big(\tau_1'(\tilde{s})+i\tau_2'(\tilde{s})\big)$,

$$f_0(\tilde{s},x)\equiv f(\tau(\tilde{s}),x)\cdot\big(\tau_1'(\tilde{s})+i\tau_2'(\tilde{s})\big).$$

Выпишем первое приближение

$$x_1=x^0 exp\frac{A(s))}{\varepsilon}+\int_0^s \varphi_0(\tilde{s})exp\frac{A(s)-A(\tilde{s})}{\varepsilon}d\tilde{s} \tag{8}$$

В (8), интеграл проинтегрируем по частям, затем переходя к модулю получим (согласно У1 и $(\tau_1'(\tilde{s})+i\tau_2'(\tilde{s}))\in Q\big((p_0)\big)$ имеем $\varphi_0(s)\in Q\big((p_0)\big)$ тогда $|\varphi_0(s)|\le M_2$)

$$|x_1|\le|x^0|+\varepsilon M_3.$$

При достаточно малых ε можно считать

$$|x^0|+\varepsilon M_3<M_0.$$

Далее имеем

$$|x_2|\le|x_1|+\left|\int_0^s f_0(\tilde{s},x_1)exp\frac{A(s)-A(\tilde{s})}{\varepsilon}d\tilde{s}\right|\le(\text{согласно У4})|x_1|+$$
$$+M_2(|x^0|+\varepsilon M_3)s,\qquad |x_2|\le\ (|x^0|+\varepsilon M_3)(1+M_3 s).$$

Продолжив оценку для последовательных приближений, получим оценку

$$|x_m|\le(|x^0|+\varepsilon M_3)\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(M_3 s)^k}{k!}\le(|x^0|+\varepsilon M_3)\,exp(M_3 s).$$

Если

$$(|x^0|+\varepsilon M_3)\,exp(M,s)\le M_0, \tag{9}$$

то все проведенные оценки являются законными за счет уменьшения длины s, кривой (p_0), всегда можно добиться выполнимости условия (9).

Для доказательства равномерной сходимости (7), оценим (x_m-x_{m-1}). Имеем

$$|x_1|\le|x^0|+\varepsilon M_3;$$
$$|x_2-x_1|\le M_3\int_0^s|x_1|d\tilde{s}\le M_3(|x^0|+\varepsilon M_3)s;$$
$$|x_3-x_2|\le M_3\int_0^s|x_2-x_1|d\tilde{s}\le M_3^2(|x_1^0|+\varepsilon M_3)\frac{s^2}{2};$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$|x_m-x_{m-1}|\le(|x_1^0|+\varepsilon M_3)\frac{(M_3 s)^{m-1}}{(m-1)!},\quad m=1,2,\ldots\ .$$

Таким образом, $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(M_3 s)^{m-1}}{(m-1)!}$ сходится равномерно для любого значения *s*, но для *s* имеется ограничение (9). Вследствие сказанного последовательность (7) равномерно сходится к некоторой функции $x(t,\varepsilon)$, которая является решением (5) для $t\in(p_0)$ при ограничении (9). Для этого решения справедлива оценка

$$|x|\le M_0, \forall t\in(p_0). \tag{10}$$

Рассмотрим случай a_2) и a_3). В (5) проведем следующие преобразования

$$x = exp\frac{A(t)-A(\tilde{t})}{\varepsilon}\left\{x^0 exp\frac{A(\tilde{t})}{\varepsilon} + \int_{t_0}^{\tilde{t}}[\varphi(\tau)+f(\tau,x)]expd\tau\frac{A(\tilde{t})-A(\tau)}{\varepsilon}\right\} + \\ + \int_{\tilde{t}}^{t}[\varphi(\tau)+f(\tau,x)]exp\frac{A(t)-A(\tau)}{\varepsilon}d\tau \tag{11}$$

После проведенных преобразований, выражение содержащееся в скобке $\{\ldots\}$ дает решение уравнения (5) при $t=\tilde{t}$ и для этого решения справедлива оценка (10). Учитывая вышесказанное, (11) представим в виде

$$x = x(\tilde{t},x)exp\frac{A(t)-A(\tilde{t})}{\varepsilon} + \int_{\tilde{t}}^{t}[\varphi(\tau)+f(\tau,x)]exp\frac{A(t)-A(\tau)}{\varepsilon}d\tau. \tag{12}$$

Как и в предыдущем случае к (12) применим метод последовательных приближений, которые определяются аналогично (6). В рассматриваемом случае по пути (q) функция $ReA(t)$ строго убывает и интеграл

$$\int_0^{\tau} exp\frac{ReA(t(\sigma))-A(\tau(\tilde{\sigma}))}{\varepsilon}d\tilde{\sigma}$$

имеет порядок ε. $\sigma -$ означает длину (q) от $\tilde{t}$ до t, а (q) имеет параметрическое представление

$$\tau_1 = \tau_1(\tilde{\sigma}), \qquad \tau_2 = \tau_2(\tilde{\sigma}), \qquad 0 \le \tilde{\sigma} \le \sigma < \sigma_0.$$

При оценке последовательных приближений функция $exp\frac{A(t)-A(\tilde{t})}{\varepsilon}$, существенна только в части (q) принадлежащее D_{12}^1. Если $t \in D_{1\varepsilon}^1$, то для последовательных приближений имеем оценку

$$|x_m| \le (|x^0| + \varepsilon M_3)\frac{1}{1-M_3\varepsilon}, \text{ где } M_3\varepsilon < 1 \tag{13}$$

Если $t \in D_{11}^1$, то

$$|x_m| \le \frac{M_2\varepsilon}{1-M_3\varepsilon}, \qquad M_3\varepsilon < 1 \tag{14}$$

Таким образом, при $t \in D_{1\varepsilon}^1 \cup D_{11}^1$, ограничений на длину σ, кривой (q) не имеется. Доказательство сходимости последовательных приближений проводится, как и в предыдущем случае. Для решения (12) получим оценку

$$|x| \le \begin{cases} \dfrac{|x^0| + \varepsilon M_3}{1-M_3\varepsilon}, t \in D_{1\varepsilon}^1, \\ \dfrac{M_2\varepsilon}{1-M_3\varepsilon}, t \in D_{11}^1. \end{cases} \tag{15}$$

Объединив оценки (10), (15) можем написать

$$|x| \le \begin{cases} M_0, t \in (p_0) \\ \frac{|x^0|+\varepsilon M_3}{1-M_3\varepsilon}, t \in D_{1\varepsilon}^1 \\ \frac{M_2\varepsilon}{1-M_3\varepsilon}, t \in D_{11}^1 \end{cases} \tag{16}$$

Оценка (16) справедлива при ограничении (9).

Ограничение (9) сужает область $(p_0) \cup D_{1\varepsilon}^{1} \cup\ D_{11}^{1}$ (Рисунок 4).

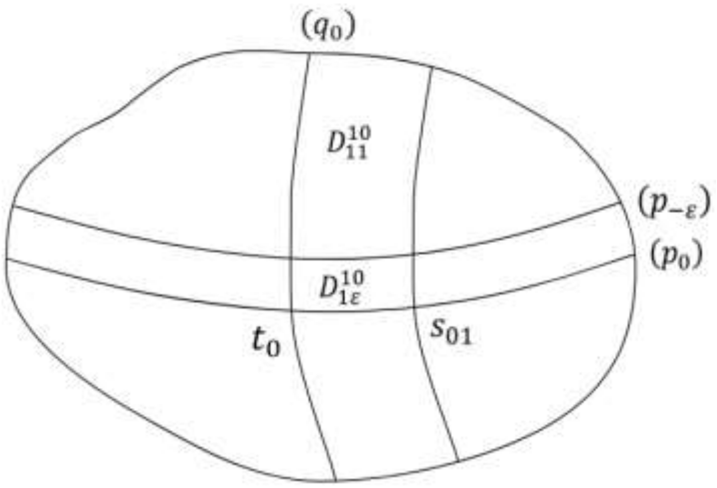

Рисунок 4. Области $\mathrm{D}_{1\varepsilon}^{10}, \mathrm{D}_{11}^{10}$

После сужения имеем области $D_{1\varepsilon}^{10}, D_{11}^{10}$. Область D_{11}^{10} является областью притяжения и она простирается до границы области D, по направлению (q_0).

2. Расширение границы области притяжения

Поставим задачу о расширении области D_{11}^{10} по направлению $(p_{-\varepsilon})$: Для этого поступим следующим образом. Точку пересечения $(p_{-\varepsilon})$ и (q_0) обозначим T_0. Согласно (16) для решения задачи (1)-(2) имеем условие

$$x(T_0, \varepsilon) = x_1^0,\ |x_1^0| = M\varepsilon. \tag{17}$$

Уравнение (1) с условием (17) можно представить в виде

$$x = x_1^0 exp\frac{A(t)}{\varepsilon} + \int_{T_0}^{t}[\varphi(\tau) + f(\tau, x)]exp\frac{A(t)-A(\tau)}{\varepsilon}d\tau, \tag{18}$$

где $A(t) = \int_{T_0}^{t} a(\tau)d\tau$

(18) рассмотрим в области D_{11}^{1}. К (18) применим метод последовательных приближений, которые определим так

$$x_m = x_1^0 exp\frac{A(t)}{\varepsilon} + \int_{T_0}^{t}[\varphi(\tau) + f(\tau, x_{m-1})]exp\frac{A(t)-A(\tau)}{\varepsilon}d\tau, \tag{19}$$
$$x_0 \equiv 0, m = 1, 2, \ldots$$

Для (19) путь интегрирования состоит из части: $(p_{-\varepsilon})[T_0, \tilde{t}], (q_0)[\tilde{t}, t]$.

Теперь оценим и докажем сходимость (19). В отличие от предыдущего случая $\forall t \in D_{11}^{1}$, для первого приближения получим оценку

$$|x_m| \le M_4\varepsilon,\ \ t \in D_{11}^{1}.$$

Для последующих приближений справедлива оценка

$$|x_m| \le M_5\varepsilon,\ \ t \in D_{11}^{1},\ \ m = 1,2, \ldots \tag{20}$$

Сходимость $\{x_m\}$ доказывается как и в предыдущем случае и для решения (19) справедлива оценка, согласно (20)

$$|x(t,\varepsilon)| \le M_5\varepsilon,\ \ t \in D_{11}^1, \tag{21}$$

Учитывая (16) и (21) для решения задачи (1)-(2)получим оценку

$$|x(t,\varepsilon)| \le M_5 \begin{cases} 1, t \in (q_0)[t_0, T_0], \\ \quad \varepsilon, t \in D_{11}^1. \end{cases} \tag{22}$$

Таким образом, на основании (22) можем утверждать, задача о расширении области притяжения решена. Аналогично доказывается, D_{11}^2 является ОП и её границы также можно расширить по направлению $(p_{-\varepsilon})$ до границы *D*.

Заключение

Если существует область притяжения, то его можно расширить до границы рассматриваемой области.

Список литературы:

1. Панков П. С., Алыбаев К. С., Тампагаров К. Б., Нарбаев М. Р. Явление погранслойных линий и асимптотика решений сингулярно возмущенных линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с аналитическими функциями // Вестник ОшГУ. 2013. №1. С. 227-231.

2. Алыбаев К. С., Тампагаров К. Б. Существование погранслойных линий для линейных сингулярно-возмущенных уравнений с аналитическими функциями // Актуальные проблемы, теории управления, топологии и операторных уравнений: Материалы II-й международной конференции, посвященной. 2013. С. 83-88.

3. Алыбаев К. С., Мурзабаева А. Б. Построение областей притяжения при вырождении сингулярно возмущенных уравнений // Международный научно-исследовательский журнал. 2018. №9-1 (75). С. 7-11. https://doi.org/10.23670/IRJ.2018.75.9.001

4. Алыбаев К. С., Нарымбетов Т. К. Области притяжения решений сингулярно возмущенных уравнений при различных начальных значениях // Евразийское Научное Объединение. 2021. №6-1. С. 1-6.

5. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного. М.: Наука, 1973. 736 с.

6. Федорюк М. В. Метод перевала. М.: Наука, 1977. 368 с.

References:

1. Pankov, P. S., Alybaev, K. S., Tampagarov, K. B., & Narbaev, M. R. (2013). Yavlenie pogransloinykh linii i asimptotika reshenii singulyarno vozmushchennykh lineinykh obyknovennykh differentsial'nykh uravnenii s analiticheskimi funktsiyami. *Vestnik OshGU*, (1), 227-231. (in Russian).

2. Alybaev, K. S., & Tampagarov, K. B. (2013). Sushchestvovanie pogransloinykh linii dlya lineinykh singulyarno-vozmushchennykh uravnenii s analiticheskimi funktsiyami. In *Aktual'nye problemy, teorii upravleniya, topologii i operatornykh uravnenii: Materialy II-i mezhdunarodnoi konferentsii, posvyashchennoi* (pp. 83-88). (in Russian).

3. Alybaev, K. S., & Murzabaeva, A. B. (2018). Postroenie oblastei prityazheniya pri vyrozhdenii singulyarno vozmushchennykh uravnenii. *Mezhdunarodnyi nauchno-issledovatel'skii zhurnal*, (9-1 (75)), 7-11. (in Russian). https://doi.org/10.23670/IRJ.2018.75.9.001

4. Alybaev, K. S., & Narymbetov, T. K. (2021). Oblasti prityazheniya reshenii singulyarno vozmushchennykh uravnenii pri razlichnykh nachal'nykh znacheniyakh. *Evraziiskoe Nauchnoe Ob''edinenie*, (6-1), 1-6. (in Russian).

5. Lavrent'ev, M. A., & Shabat, B. V. (1973). Metody teorii funktsii kompleksnogo. Moscow. (in Russian).

6. Fedoryuk, M. V. (1977). Metod perevala. Moscow. (in Russian).

Работа поступила в редакцию 24.05.2024 г.

Принята к публикации 31.05.2024 г.

Ссылка для цитирования:

Мусакулова Н. К. Расширение областей притяжений решений сингулярно возмущенных уравнений // Бюллетень науки и практики. 2024. Т. 10. №7. С. 12-20. https://doi.org/10.33619/2414-2948/104/01

Cite as (APA):

Musakulova, N. (2024). Expanding the Areas of Attraction of Solutions to Singularly Perturbed Equations. *Bulletin of Science and Practice, 10*(7), 12-20. (in Russian). https://doi.org/10.33619/2414-2948/104/01