УДК 517.928 https://doi.org/10.33619/2414-2948/102/05

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ АВТОНОМНЫХ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ УРАВНЕНИЙ ПРИ СМЕНЕ УСТОЙЧИВОСТИ ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ В НЕСКОЛЬКИХ ТОЧКАХ

©***Нурматова М. Н.,*** *ORCID: 0009-0003-4082-1161, SPIN-код: 2628-2591,*
Жалал-Абадский государственный университет,
г. Джалал-Абад, Кыргызстан, nurmatova_mairamgul@mail.ru

ASYMPTOTICS OF SOLUTIONS OF AUTONOMOUS SINGULARLY PERTURBED EQUATIONS WHEN THE STABILITY OF THE EQUILIBRIUM POSITION CHANGES AT SEVERAL POINTS

©***Nurmatova M.,*** *ORCID: 0009-0003-4082-1161, SPIN-code: 2628-2591, Jalal-Abad State University Kyrgyzstan, Jalal-Abad, Kyrgyzstan, nurmatova_mairamgul@mail.ru*

Аннотация. Рассматривается система, состоящая из *2n* уравнений с быстрыми переменными и одного уравнения с медленной переменной. Матрица первого приближения системы быстрых переменных имеет *2n* попарно комплексно-сопряженных собственных значений. На устойчивость положения равновесия системы быстрых переменных влияют все собственные значения. В ранних исследованиях рассмотрены случаи, когда на устойчивость положения равновесия влияет только одна пара комплексно-сопряженных собственных значений. Решена задача на задержку решения системы быстрых переменных, вблизи возникшего неустойчивого положения равновесия. Определен отрезок времени задержки решения.

Abstract. Considers a system consisting of *2n* equations with fast variables and one equation with a slow variable. The first approximation matrix of the system of fast variables has *2n* pairwise complex conjugate eigenvalues. The stability of the equilibrium position, a system of fast variables, is influenced by all eigenvalues. Early studies considered cases where the stability of the equilibrium position is affected by only one pair of complex conjugate eigenvalues. The problem of delaying the solution of a system of fast variables near an unstable equilibrium position has been solved. The delay time for the decision is determined.

Ключевые слова: сингулярно возмущенные уравнения, положение равновесия, устойчивость, ограниченность, сходимость, аналитические функции, гармонические функции, линии уровня, задержка решения.

Keywords: singularly perturbed equations, equilibrium position, stability, boundedness, convergence, analytical functions, harmonic functions, level lines, solution delay.

Постановка задачи. Пусть рассматривается следующая система

$$\varepsilon x_{2j-1}'(t,\varepsilon) = (y-\alpha_j)(x_{2j-1}(t,\varepsilon)-y) - x_{2j}(t,\varepsilon) + \tag{1}$$
$$+V^2(x_1(t,\varepsilon)-y, x_2(t,\varepsilon), \dots, x_{2n-1}(t,\varepsilon)-y, x_{2n}(t,\varepsilon))(x_{2j-1}(t,\varepsilon)-y)$$
$$\varepsilon x_{2j}'(t,\varepsilon) = x_{2j-1}(t,\varepsilon) + (y-\alpha_j)x_{2j}(t,\varepsilon) +$$
$$+V^2(x_1(t,\varepsilon)-y, x_2(t,\varepsilon), \dots, x_{2n-1}(t,\varepsilon)-y, x_{2n}(t,\varepsilon))x_{2j}(t,\varepsilon),$$

$$y'(t) = 1, j = 1,2, \dots, n, \tag{2}$$

где $0 < \varepsilon$ – малый вещественный параметр; $\alpha_j \in R$ – множество вещественных чисел и $0 = \alpha_1 < \alpha_2 < \ \dots \ < \alpha_n$; $t \in \mathcal{D} = \{t \in C -$ множество комплексных чисел, $|t| < r_0 \in R, \alpha_n < 1\}$, $V(x_1 - y, x_2, \dots, x_{2n-1} - y, x_{2n}) = (x_1 - y)^2 + x_2^2 + \ \dots \ + (x_{2n-1} - y)^2 + x_{2n}^2$

с начальным условием

$$x_{2j-1}(t_0, \varepsilon) - y(t_0) = x_{2j-1}^0, \qquad x_{2j}(t_0, \varepsilon) = x_{2j}^0 \tag{3}$$

система (1), в пространстве быстрых переменных, в точке $(y, 0, \dots, y, 0)$ имеет положение равновесие. Матрица первого приближения системы (1), имеет собственные значения $\lambda_{2j-1}(y) = y - \alpha_j + i$, $\lambda_{2j}(y) = y - \alpha_j - i$, $j = 1, 2, \dots, n$.

Таким образом, на устойчивость положения равновесия влияют все собственные значения, причем устойчивость положения равновесия нарушается при $y = 0, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, т. е. в n точках. Рядом авторов рассмотрены случаи, когда устойчивость положения равновесия определяется одной парой, а в двумя парами комплексно-сопряженных, собственных значений, причем устойчивость положения равновесия теряется только в одной точке ($y = 0$). [1–6].

Определение. Если происходит смена устойчивости положения равновесия и при этом решение системы быстрых переменных не сразу покидает возникшее неустойчивое положение равновесие, а в течение конечного времени остается вблизи него, то будем говорить о том, что произошла задержка решения вблизи неустойчивого положения равновесия, кратко ЗР.

Задача. Исследовать решение задачи (1), (3) на ЗР.

Для решения поставленной задачи воспользуемся методами изложенного в [5–8].

Решение задачи:

Следуя, решение задачи разделим на части:

1. Преобразование исходного уравнения
2. Геометрические построения и выбор путей интегрирования
3. Аналитическая [6].

1. Преобразование исходного уравнения

Далее, для простоты, аргументы неизвестной функции будем опускать. Решение уравнения (2) возьмём в виде $y = t$ и в (1) введем новые неизвестные функции следующим образом $x_{2j-1} - y = u_{2j-1}, x_{2j} = u_{2j}$, $j = 1,2, \dots, n.$ Получим

$$\begin{aligned} \varepsilon u_{2j-1}' &= (t - \alpha_j)u_{2j-1} - u_{2j} + V^2(u_1,\ u_2, \dots, u_{2n})u_{2j-1} - \varepsilon, \\ \varepsilon u_{2j}' &= u_{2j-1} + (t - \alpha_j)u_{2j} + V^2(u_1,\ u_2, \dots, u_{2n})u_{2j}, \end{aligned} \tag{4}$$

$$u_{2j-1}(t_0, \varepsilon) = x_{2j-1}^0 - t_0, u_{2j}(t_0, \varepsilon) = x_{2j}^0 \tag{5}$$

В (4) первое уравнение умножив на $(\pm i)$, затем складывая на второе уравнение получим

$$\begin{aligned} \varepsilon z_{2j-1}' &= (t - \alpha_j + i)z_{2j-1} + V^2(z_1, \dots, z_{2n})z_{2j-1} - \varepsilon, \\ \varepsilon z_{2j}' &= (t - \alpha_j - i)z_{2j} + V^2(z_1, \dots, z_{2n})z_{2j} - \varepsilon, \end{aligned} \tag{6}$$

Условием

$$z_{2j-1}(t_0, \varepsilon) = z_{2j-1}^0, z_{2j}(t_0, \varepsilon) = z_{2j}^0 \tag{7}$$

Т. 10. №5. 2024
https://doi.org/10.33619/2414-2948/102

где $V(z_1, z_2, \dots, z_{2n}) = z_1 \cdot z_2 + \dots + z_{2n-1} \cdot z_{2n}$.

Далее будем считать $|z_{2j-1}^0| \le M_1\varepsilon, |z_{2j}^0| \le M_2\varepsilon$. Здесь и далее буквами $M_1, M_2, \dots$ будем обозначать положительных постоянных, не зависящих от ε .Задачу (6)-(7) заменим следующим

$$z_{2j-1} = z_{2j-1}^0 exp\frac{F_{2j-1}(t) - F_{2j-1}(t_0)}{2\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}(V^2 - \varepsilon)\, exp\frac{F_{2j-1}(t) - F_{2j-1}(\tau)}{2\varepsilon}d\tau \tag{8}$$
$$z_{2j} = z_{2j}^0 exp\frac{F_{2j}(t) - F_{2j}(t_0)}{2\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}(V^2 - \varepsilon)\, exp\frac{F_{2j}(t) - F_{2j}(\tau)}{2\varepsilon}d\tau$$

где обозначены $F_{2j-1}(t) = (t - \alpha_j + i)^2, F_{2j}(t) = (t - \alpha_j - i)^2$.

2. *Геометрические построения и выбор путей интегрирования*

Для геометрических построений используем линии уровня и свойства функций $ReF_{2j}(t)$, $\mathcal{J}mF_{2j}(t), ReF_{2j-1}(t)$, $\mathcal{J}mF_{2j-1}(t)$. Функции $F_{2j}(t)$, $F_{2j-1}(t)$ соответственно в точках $t = \alpha_j - i, t = \alpha_j + i$ имеют двухкратные нули и линии уровня функций $ReF_{2j-1}(t), \mathcal{J}mF_{2j-1}(t)$, $ReF_{2j}(t), \mathcal{J}mF_{2j}(t)$ разветвляются в этих точках.

Введем обозначения $(p_{0\,2j-1}) = \{t \in \mathcal{D},\ ReF_{2j-1}(t) = 0\}$, $(p_{0\,2j}) = \{t \in \mathcal{D},\ ReF_{2j}(t) = 0\}$ (Рисунок 1).

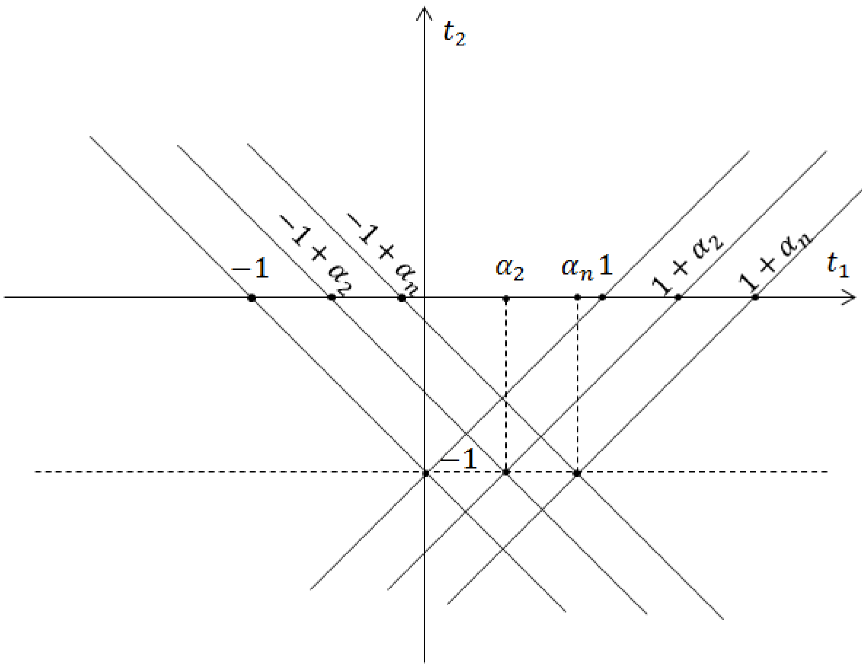

Рисунок 1. Разветвляющиеся линии $(p_{0\,2j-1}), (p_{0\,2j})$.

Определим прямую $(\mathcal{P}_1)$: $t_2 = \frac{1}{t_0}(t_1 - t_0)$, которая проходит через точки $(t_0; 0), (-1; 0)$, причем будем считать $t_0 < -1$.

Часть $(\mathcal{P}_1)$, соединяющую точки $(t_0; 0), (-1; 0)$ обозначим (K_1). Часть ветви (p_{01}), соединяющая точки $(0; -1), (1; 0)$ обозначим (K_2). Определим $(\overline{K}_1), (\overline{K}_2)$. Симметрию будем понимать относительно действительной оси. Область, ограниченный (K_1), (K_2), $(\overline{K}_1), (\overline{K}_2)$ обозначим $\mathcal{D}_0$. С учетом дальнейших вычислений область $\mathcal{D}_0$ разделим на несколько частей. Для этого определим прямые $(\mathcal{P}_2)$: $\{t \in \mathcal{D},\ \ t_1 - t_2 - 1 + \sqrt{\varepsilon} = 0\}$,

$(\mathcal{P}_3)$: $\{t \in \mathcal{D},\ \ t_1 - t_2 - 1 + q_1 = 0, 0 \ll q_1 \ll 1$ и не зависит от $\varepsilon\}$,

$(\mathcal{P}_4)$: $\{t \in \mathcal{D},\ \ t_1 + t_2 + 1 - \sqrt{\varepsilon} = 0\}$,

$(\mathcal{P}_5)$: $\{t \in \mathcal{D},\ \ t_1 + t_2 + 1 - q_1 = 0\}$

и прямые $(\bar{\mathcal{P}}_j)$ $(j = 2, \dots, 5)$ симметричные к $(\mathcal{P}_j)$ $(j = 2, \dots, 5)$.

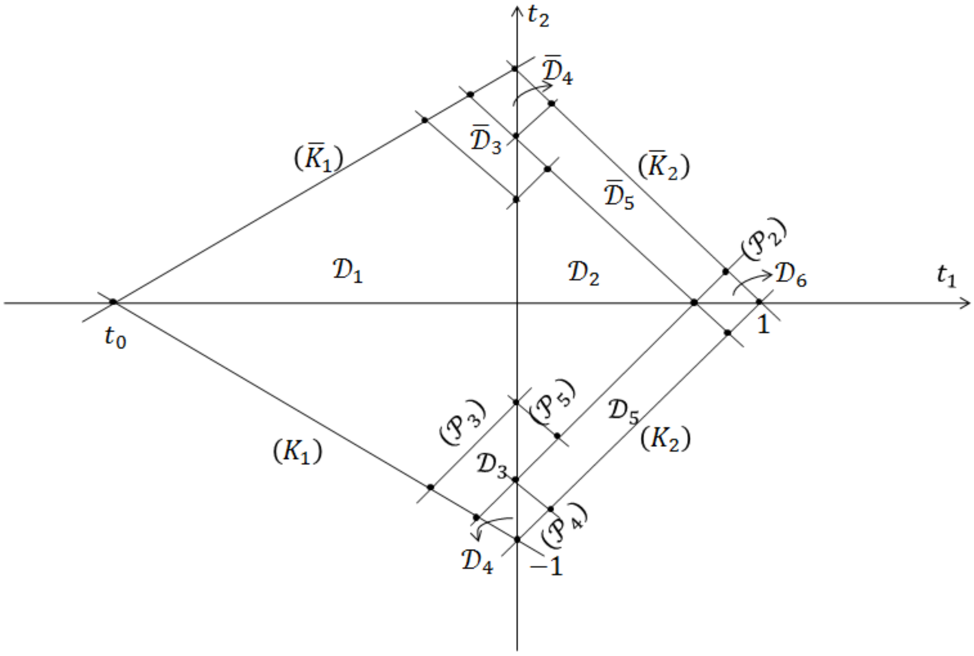

Рисунок 2. Деление области $\mathcal{D}_0$.

Прямыми $(\mathcal{P}_j), (\bar{\mathcal{P}}_j)$ $(j = 2, \dots, 5)$ область $\mathcal{D}_0$ разделяется на части $\mathcal{D}_j$ $(j = 1, \dots, 6)$, $\bar{\mathcal{D}}_3, \bar{\mathcal{D}}_4, \bar{\mathcal{D}}_5$.

Теперь выберем пути интегрирования для (8). Пути интегрирования выбираются согласно следующей леммы.

Лемма. Пусть существует множество $\Pi = \{p(t_0, t), (p(t_0, t))$ − аналитическая кривая, соединяющая точки $t_0, t \in \mathcal{D}\}$. Если $\forall (p(t_0, t)) \in \Pi$, функции $ReF_k(t)$ $(k = 1, \dots, 2n)$ не возрастают, и $\varphi(\tau) \in Q(\mathcal{D})$, то интегралы

$$\mathcal{J}_k(t_0, t, \varepsilon) = \int\limits_{(p(t_0,t))} \varphi(\tau) exp \frac{F_k(t) - F_k(\tau)}{\varepsilon} d\tau$$

ограничены при $\varepsilon \to 0$.

Доказательство. Пусть по $(p(t_0, t))$ функция $ReF_k(\tau)$ строго убывает. По условию $(p(t_0, t))$ аналитическая кривая, тогда уравнение $(p(t_0, t))$ представима в виде $\tau_1 = \tau_1(s), \tau_2 = \tau_2(s)$, где s – длина кривой $(p(t_0, t))$ и $0 \le s < s_0 < +\infty$.

Теперь $\mathcal{J}_k(t_0, t, \varepsilon)$ представим так $\mathcal{J}_k(0, s, \varepsilon) = \int_0^s \varphi(\tau(\tilde{s})) exp \frac{F_k(t(\tilde{s})) - F_k(\tau(\tilde{s}))}{\varepsilon} (\tau_1'(\tilde{s}) + i\tau_2'(\tilde{s})) d\tilde{s}$. Отсюда имеем $|\mathcal{J}_k| \le M \int_0^s exp \frac{ReF_k(t(\tilde{s})) - ReF_k(\tau(\tilde{s}))}{\varepsilon} d\tilde{s}$

Функция $ReF_k(\tau(\tilde{s}))$ строго убывает, то $(ReF_k(\tau(\tilde{s})))' < 0$.

Тогда $|\mathcal{J}_k| \le M_1 \varepsilon, 0 < M_1$ − не зависит от ε.

Случай, когда $ReF_k(\tau)$ постоянна рассматривается аналогично. Лемма доказана.

Пусть $(p(t_0, t))$ для z_{2j-1} состоит: если $t \in \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_3 \cup \mathcal{D}_4 \cup \bar{\mathcal{D}}_3 \cup \bar{\mathcal{D}}_4$, то из части (K_1) $[t_0, \tilde{t}]$; части прямой $(\mathcal{P}_1)$: $\{t_1 - t_2 - 1 + \tilde{q}_1 = 0, 0 \le \tilde{q}_1 \le 1 - t_0\}$;

если $t \in \mathcal{D}_2 \cup \mathcal{D}_5 \cup \mathcal{D}_6 \cup \bar{\mathcal{D}}_5$, то из кривой (K_1) $[t_0, (0; -1)]$; части (K_2) $[(0; -1); \tilde{t}]$, части $(\mathcal{P}_2)$: $\{t_1 + t_2 + 1 - \tilde{q}_2 = 0, \sqrt{\varepsilon} \le \tilde{q}_2 \le 2\}$ $[\tilde{t}, t]$.

Пути для z_{2j} выбираются симметричными, к путям для z_{2j-1}. Нетрудно проверить, выбранные пути удовлетворяют условию леммы.

3. *Аналитическая.* К (8) применим метод последовательных приближений, которые определим следующим образом

$$z_{2j-1\,m} = z_{2j-1}^{0} exp\frac{F_{2j-1}(t)-F_{2j-1}(t_0)}{2\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}(V_{m-1}^{2}-\varepsilon)\,exp\frac{F_{2j-1}(t)-F_{2j-1}(\tau)}{2\varepsilon}d\tau \tag{9}$$

$$z_{2j\,m} = z_{2j}^{0} exp\frac{F_{2j}(t)-F_{2j}(t_0)}{2\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}(V_{m-1}^{2}-\varepsilon)\,exp\frac{F_{2j}(t)-F_{2j}(\tau)}{2\varepsilon}d\tau$$

$z_{2j-1\,0} \equiv 0, z_{2j\,0} \equiv 0, m = 1,2, \ldots,$

где $V_{m-1}^{2} = z_{1\,m-1}\cdot z_{2\,m-1} + \ldots + z_{2n-1\,1}\cdot z_{2n\,1}$.

Далее, как и в [6], проводится оценка и доказательство равномерной сходимости (9) в области $\mathcal{D}_0$. Последовательные приближения в $\mathcal{D}_0$ равномерно сходятся к некоторой функции $z(t,\varepsilon)$, которая является решением (8) и для этого решения справедлива оценка

$$\|z(t,\varepsilon)\| \le M_2\begin{cases}\varepsilon, & t\in\mathcal{D}_1\cup\mathcal{D}_2,\\ \sqrt{\varepsilon}, & t\in\mathcal{D}_3\cup\mathcal{D}_4\cup\mathcal{D}_5\cup\mathcal{D}_6\cup\overline{\mathcal{D}}_3\cup\overline{\mathcal{D}}_4\cup\overline{\mathcal{D}}_5\end{cases} \tag{10}$$

$$t\in\left(\bigcup_{j=3}^{5}\left(\mathcal{D}_j\cup\overline{\mathcal{D}}_j\right)\right)\cup\mathcal{D}_6$$

Оценку (10) рассмотрим для $t\in R$. Тогда

$$\|z(t,\varepsilon)\| \le M_2\begin{cases}\varepsilon, t_0\le t\le 1-\sqrt{\varepsilon},\\ \sqrt{\varepsilon}, 1-\sqrt{\varepsilon}< t\le 1\end{cases} \tag{11}$$

Из (11) вытекает, что решение (1) с условием (3) задерживается вблизи неустойчивого положения равновесия на отрезке $[0;\ 1]$.

Список литературы:

1. Шишкова М. А. Рассмотрение одной системы дифференциальных уравнений с малым параметром при высших производных // Доклады Академии наук. 1973. Т. 209. №3. С. 576-579.

2. Нейштадт А. И. О затягивании потери устойчивости при динамических бифуркациях. I // Дифференциальные уравнения. 1987. Т. 23. №12. С. 2060-2067.

3. Алыбаев К. С. Метод линий уровня исследования сингулярно возмущенных уравнений при нарушении условия устойчивости // Вестник КГНУ. 2001. Т. 3. С. 190-200.

4. Турсунов Д. А. Асимптотика решения задачи Коши при нарушении устойчивости точки покоя в плоскости «быстрых движений» // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2018. №54. С. 46-57. https://doi.org/10.17223/19988621/54/4

5. Алыбаев К., Мусакулова Н. Метод линий уровня в теории сингулярно возмущенных уравнений // Вестник Ошского государственного университета. 2022. №4. С. 206-217. https://doi.org/10.52754/16947452_2022_4_206

6. Алыбаев К. С., Нурматова М. Н. Явление затягивания потери устойчивости в теории сингулярных возмущений // Бюллетень науки и практики. 2023. Т. 9. №12. С. 12-19. https://doi.org/10.33619/2414-2948/97/01

7. Алыбаев К. С., Нурматова М. Н. Рекуррентное представление решений сингулярно возмущенных уравнений с точками поворота в комплексной плоскости // Вестник Жалал-Абадского государственного университета. 2021. №1. С. 14-19.

8. Алыбаев К. С., Нурматова М. Н., Мусакулова Н. К. Методы исследования асимптотики решений сингулярно возмущенных уравнений в комплексных областях // Бюллетень науки и практики. 2024. Т. 10. №3. С. 14-27. https://doi.org/10.33619/2414-2948/100/01

References:

1. Shishkova, M. A. (1973). Rassmotrenie odnoi sistemy differentsial'nykh uravnenii s malym parametrom pri vysshikh proizvodnykh. In *Doklady Akademii nauk, 209*(3), 576-579. (in Russian).

2. Neishtadt, A. I. (1987). O zatyagivanii poteri ustoichivosti pri dinamicheskikh bifurkatsiyakh. I. *Differentsial'nye uravneniya, 23*(12), 2060-2067. (in Russian).

3. Alybaev, K. S. (2001). Metod linii urovnya issledovaniya singulyarno vozmushchennykh uravnenii pri narushenii usloviya ustoichivosti. *Vestnik KGNU, 3*, 190-200. (in Russian).

4. Tursunov, D. A. (2018). Asimptotika resheniya zadachi Koshi pri narushenii ustoichivosti tochki pokoya v ploskosti “bystrykh dvizhenii". *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika,* (54), 46-57. (in Russian). https://doi.org/10.17223/19988621/54/4

5. Alybaev, K., & Musakulova, N. (2022). Metod linii urovnya v teorii singulyarno vozmushchennykh uravnenii. *Vestnik Oshskogo gosudarstvennogo universiteta,* (4), 206-217. (in Russian). https://doi.org/10.52754/16947452_2022_4_206

6. Alybaev, K., & Nurmatova, M. (2023). The Phenomenon of Delaying Loss of Stability in the Theory of Singular Perturbations. *Bulletin of Science and Practice, 9*(12), 12-19. (in Russian). https://doi.org/10.33619/2414-2948/97/01

7. Alybaev, K. S., & Nurmatova, M. N. (2021). Rekurrentnoe predstavlenie reshenii singulyarno vozmushchennykh uravnenii s tochkami povorota v kompleksnoi ploskosti. *Vestnik Zhalal-Abadskogo gosudarstvennogo universiteta,* (1), 14-19. (in Russian).

8. Alybaev, K., Nurmatova, M., & Musakulova, N. (2024). Methods for Studying Asymptotics of Solutions to Singularly Perturbed Equations in Complex Domains. *Bulletin of Science and Practice, 10*(3), 14-27. (in Russian). https://doi.org/10.33619/2414-2948/100/01

Работа поступила в редакцию 04.04.2024 г.

Принята к публикации 12.04.2024 г.

Ссылка для цитирования:

Нурматова М. Н. Асимптотика решений автономных сингулярно возмущенных уравнений при смене устойчивости положения равновесия в нескольких точках // Бюллетень науки и практики. 2024. Т. 10. №5. С. 40-45. https://doi.org/10.33619/2414-2948/102/05

Cite as (APA):

Nurmatova, M. (2024). Asymptotics of Solutions of Autonomous Singularly Perturbed Equations when the Stability of the Equilibrium Position Changes at Several Points. *Bulletin of Science and Practice, 10*(5), 40-45. (in Russian). https://doi.org/10.33619/2414-2948/102/05