УДК 517.984, 621.431 https://doi.org/10.33619/2414-2948/102/04

ПРИМЕНЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПАКЕТА MAPLE К ПОИСКУ ЧАСТОТ КОЛЕБАНИЙ РАЗДАТОЧНОГО РЕДУКТОРА

*©**Сафина Г. Ф.,** ORCID: 0000-0002-7326-0896, SPIN-код: 4562-2453, канд. физ.-мат. наук, Уфимский университет науки и технологий, г. Нефтекамск, Россия, safinagf@mail.ru*
*©**Коняев Ю. С.,** Уфимский университет науки и технологий, г. Нефтекамск, Россия, iury.conyaev2016@yandex.ru*

APPLICATION OF MAPLE MATHEMATICAL PACKAGE TO SEARCH FOR TRANSFER GEAR OSCILLATION FREQUENCIES

*©**Safina G.,** ORCID: 0000-0002-7326-0896, SPIN-code: 4562-2453, Ph.D., Ufa University of Science and Technology, Neftekamsk, Russia, safinagf@mail.ru*
*©**Konyaev Yu.,** Ufa University of Science and Technology, Neftekamsk, Russia, iury.conyaev2016@yandex.ru*

Аннотация. Рассмотрена прямая спектральная задача определения частот свободных крутильных колебаний раздаточного редуктора, составной части силовых установок с дизельным топливом, коробок передач. Редуктор смоделирован динамической механической системой с тремя степенями свободы из подшипников и шестерни. Найдено частотное уравнение прямой задачи, по которому проведены численные расчеты по поиску частот крутильных колебаний раздаточного редуктора. К выводу уравнения и поиску частот колебаний редуктора приведена программная реализация преобразований с использованием функционала и библиотек математического пакета Maple.

Abstract. Considers direct spectral problem of determination of frequencies of free torsional oscillations of transfer gearbox, component part of power plants with diesel fuel, gearboxes. The gearbox is modeled by a dynamic mechanical system with three degrees of freedom of bearings and gear. The frequency equation of the direct problem was found, according to which numerical calculations were carried out to search for the frequencies of torsional vibrations of the transfer gearbox. To the conclusion of the equation and the search for the frequencies of the gearbox oscillations, a software implementation of transformations using the functionality and libraries of the Maple mathematical package is given.

Ключевые слова: прямая спектральная задача, раздаточный редуктор, крутильные колебания, частотное уравнение, пакет Maple.

Keywords: direct spectral problem, distribution gearbox, torsional oscillations, frequency equation, Maple package.

Известно, что редукторы, валы, муфты и другие элементы являются важными частями различных технических конструкций, в том числе силовых установок с дизельным топливом, коробок передач и т. д. [1–4].

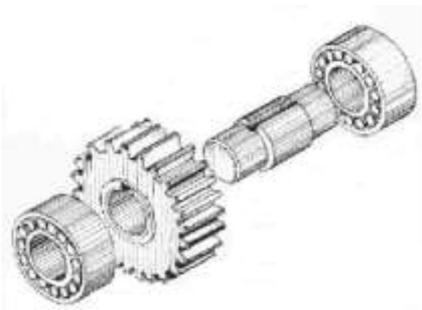
Рассмотренная в работе задача поиска частот свободных колебаний раздаточного редуктора относится к крутильным колебаниям упруго-массовых систем, опасные динамические или усталостные нагрузки которых могут приводить к различным аварийным повреждениям [5–7]. Такие проблемы чаще решаются с помощью технологий акустической

Т. 10. №5. 2024
https://doi.org/10.33619/2414-2948/102

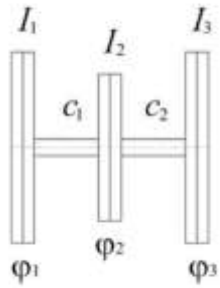
вибродиагностики механических систем или его частей [8–11, 14, 15]. Диагностика же систем как обратная спектральная задача не может исследоваться без моделирований в прямых спектральных задачах [2–5, 12].

В настоящее время существуют возможности применения к исследованиям как прямых, так и обратных задач компьютерных средств, в том числе математических пакетов, программных алгоритмов. В нашем исследовании получена математическая модель к решению задачи определения частот крутильных колебаний раздаточного редуктора как трехмассовой динамической системы и к поиску частот применен функционал математического пакета Maple [13].

Рассмотрим раздаточный редуктор, состоящий из вала с насаженными краевыми подшипниками и передаточной зубчатой шестерней (Рисунок а) как систему с тремя степенями свободы — вала с тремя массами (Рисунок б).



а)



б)

Рисунок. Динамическая модель раздаточного редуктора

Здесь: $\varphi_k \ (k=\overline{1;3})$ — обобщенные координаты — углы закручивания масс (подшипников и шестерни); $I_k \ (k=\overline{1;3})$ — моменты инерции масс; c_1, c_2 — коэффициенты жесткостей, с которыми закручиваются участки вала между массами. Такой переход к динамической модели с тремя степенями свободы приводит к известной системе дифференциальных уравнений колебательного процесса в виде [1]:

$$\begin{cases} I_1 \dfrac{d^2\varphi_1}{dt^2} - c_1(\varphi_1 - \varphi_2) = 0; \\ I_2 \dfrac{d^2\varphi_2}{dt^2} + c_1(\varphi_1 - \varphi_2) - c_2(\varphi_2 - \varphi_3) = 0; \\ I_3 \dfrac{d^2\varphi_3}{dt^2} + c_2(\varphi_2 - \varphi_3) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

С учетом малых свободных колебаний модели принимаем решения системы (1) по гармоническому закону в виде:

$$\varphi_k = M_k \cos(pt + \alpha), \tag{2}$$

где P — собственная частота, $M_k \ (k=\overline{1;3})$ — амплитуды, $pt+\alpha$ — фаза колебаний в момент времени t.

Стандартная постановка функций φ_k и их производных $\dfrac{d^2\varphi_k}{dt^2} \ (k=\overline{1;3})$ в систему (1) приводит к системе уравнений:

$$\begin{cases} I_1 p^2 M_1 - c_1(M_1 - M_2) = 0; \\ I_2 p^2 M_2 + c_1(M_1 - M_2) - c_2(M_2 - M_3) = 0; \\ I_3 p^2 M_3 + c_2(M_2 - M_3) = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Полученную систему (3) решаем относительно нетривиальных значений амплитуд M_k $(k = \overline{1;3})$ колебаний и приходим после преобразований соответствующего определителя третьего порядка к вековому уравнению задачи:

$$I_1 I_2 I_3 p^4 - \left(c_1 I_3 (I_1 + I_2) + c_2 I_1 (I_2 + I_3)\right) p^2 + c_1 c_2 (I_1 + I_2 + I_3) = 0. \tag{4}$$

Численные расчеты с помощью векового уравнения (4) позволяют определять значения частот колебаний раздаточного редуктора по известным значениям моментов инерции масс шестерни и подшипников, а также известных коэффициентах жесткостей участков вала редуктора на кручение. Проведенные расчеты важны для установления влияния характеристик механической системы на значения частот и амплитуд ее свободных крутильных колебаний. С помощью векового уравнения (4) проведены также исследования влияния на частоты крутильных колебаний раздаточного редуктора физических параметров масс (моментов инерции масс — шестерни и подшипников) параметров жесткостей (коэффициентов жесткостей на кручение участков вала между подшипниками и шестерней). К проводимым в исследовании аналитическим и численным шагам были использованы функциональные команды и встроенные библиотеки математического пакета Maple [13].

Приведем листинг программы (с пояснениями шагов алгоритма) для определения частот колебаний раздаточного редуктора. Задаем точность работы (вычислений) в пакете. Подключаем библиотеку по линейной алгебре: ▷ restart; with(LinearAlgebra):

Формируем характеристический (частотный) определитель задачи: ▷ M:= Matrix(3, [[i1*p^2-c1, c1, 0], [c1, i2*p^2-c1-c2, c2], [0, c2, i3*p^2-c2]]);

$$M := \begin{bmatrix} i1\,p^2 - c1 & c1 & 0 \\ c1 & i2\,p^2 - c1 - c2 & c2 \\ 0 & c2 & i3\,p^2 - c2 \end{bmatrix}$$

Находим определитель матрицы системы (получаем вековое уравнение):

▷ y:=Determinant(M);

$$y := i1\,i2\,i3\,p^6 - c1\,i1\,i3\,p^4 - c1\,i2\,i3\,p^4 - c2\,i1\,i2\,p^4 - c2\,i1\,i3\,p^4 + c1\,c2\,i1\,p^2 + c1\,c2\,i2\,p^2 + c1\,c2\,i3\,p^2$$

Группируем уравнение относительно частоты колебаний: ▷ eq:=collect (y, p, distributed);

$$eq := i1\,i2\,i3\,p^6 + (-c1\,i1\,i3 - c1\,i2\,i3 - c2\,i1\,i2 - c2\,i1\,i3)\,p^4 + (c1\,c2\,i1 + c1\,c2\,i2 + c1\,c2\,i3)\,p^2$$

Задаем физические параметры системы: ▷ c1:=0.3*10^3; c2:=0.34*10^3; i1:=4.7; i2:=8.2; i3:=4.3;

$$c1 := 300.0$$
$$c2 := 340.00$$
$$i1 := 4.7$$
$$i2 := 8.2$$
$$i3 := 4.3$$

Подставляем значения физических параметров в частотное уравнение: ▷ eq1:=eq;

$$eq1 := 165.722\,p^6 - 36616.0000\,p^4 + 1.754400000\,10^6\,p^2$$

Решаем вековое уравнение: ▷ p:=fsolve(eq1,p);

$$p := -12.27600315, -8.381412884, 0., 0., 8.381412884, 12.27600315$$

Выделяем значения частот колебаний: ▷ p1:=p[5]; p2:=p[6];

$$p1 := 8.381412884$$
$$p2 := 12.27600315$$

Заметим, что в численной части алгоритма получены частоты колебаний редуктора равные $p_1 = 8{,}3814\ c^{-1}$ и $p_2 = 12{,}2760\ c^{-1}$ при жесткостях $c_1 = 0{,}3 \cdot 10^3 H/м$, $c_2 = 0{,}34 \cdot 10^3 H/м$ и моментах инерции $I_1 = 4{,}7 кг \cdot м^2$, $I_2 = 8{,}2 кг \cdot м^2$, $I_3 = 4{,}3 кг \cdot м^2$ масс динамической модели.

В заключении отметим, что представление раздаточного редуктора в виде динамической механической модели с тремя степенями свободы (двух краевых подшипников и шестерни, насаженных на валу) позволило найти вековое уравнение свободных крутильных колебаний редуктора стандартными приемами. Разработанные программные решения задачи в математическом пакете Maple подтвердили аналитические выводы, а также рационализировали проведения численных расчетов по полученным моделям задачи.

Список литературы:

1. Ахтямов А. М. Теория идентификации краевых условий и ее приложения. М.: Физматлит, 2009. 271 с.

2. Ahmadian H., Mottershead J. E., Friswell M. I. Boundary condition identification by solving characteristic equations // Journal of Sound and Vibration. 2001. V. 247. №5. P. 755-763. https://doi.org/10.1006/jsvi.2001.3708

3. Бабаков И. М. Теория колебаний. М.: Дрофа, 2004. 592 с.

4. Бидерман В. Л. Теория механических колебаний. М.: Ленанд, 2017. 416 с.

5. Болотин В. В. Вибрации в технике: Справочник. Т. 1. Колебания линейных систем / М.: Машиностроение, 1978. 352 с.

6. Вульфсон И. И. Динамика машин. Колебания. М.: Юрайт, 2017. 275 с.

7. Вульфсон И. И. Краткий курс теории механических колебаний. М.: ВНТР, 2017. 241 с.

8. Горяченко В. Д. Элементы теории колебаний. М.: Наука, 2001. 395 с.

9. Григорьев А. Ю., Григорьев К. А., Малявко Д. П. Колебания и виброактивность элементов машин. СПб.: Университет ИТМО, 2016. 136 с.

10. Зубарев Ю. М. Динамические процессы в технологии машиностроения. Основы конструирования машин. М.: Лань, 2021. 212 с.

11. Ильин М. М., Колесников К. С., Саратов Ю. С. Теория колебаний. М.: МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2003. 272 с.

12. Кельзон А. С. Расчет и конструирование роторных машин. Л.: Машиностроение, 1977. 260 с.

13. Кирсанов М. Н. Практика программирования в системе Maple. М.: МЭИ, 2011. 208 с.

14. Коняев Ю. С., Сафина Г. Ф. Исследования по пружинно-массовой модели ракетного двигателя твердого топлива // Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании: спутник Материалы Международной научной конференции. 2023. С. 16-16.

15. Сафина Г. Ф. Влияние параметров ротора синхронного двигателя турбомашины на частоты его колебаний // Инженерная физика. 2022. №10. С. 32-38.

Т. 10. №5. 2024
https://doi.org/10.33619/2414-2948/102

References:

1. Akhtyamov, A. M. (2009). Theory of identification of boundary conditions and its applications. Moscow. (in Russian).

2. Ahmadian, H., Mottershead, J. E., & Friswell, M. I. (2001). Boundary condition identification by solving characteristic equations. *Journal of Sound and Vibration, 247*(5), 755-763. https://doi.org/10.1006/jsvi.2001.3708

3. Babakov, I. M. (2004). Teoriya kolebanii. Moscow. (in Russian).

4. Biderman, V. L. (2017). Teoriya mekhanicheskikh kolebanii. Moscow. (in Russian).

5. Bolotin, V. V. (1978). Vibratsii v tekhnike: Spravochnik. T. 1. Kolebaniya lineinykh system. Moscow. (in Russian).

6. Vul'fson, I. I. (2017). Dinamika mashin. Kolebaniya. Moscow. (in Russian).

7. Vul'fson, I. I. (2017). Kratkii kurs teorii mekhanicheskikh kolebanii. Moscow. (in Russian).

8. Goryachenko, V. D. (2001). Elementy teorii kolebanii. Moscow. (in Russian).

9. Grigor'ev, A. Yu., Grigor'ev, K. A., & Malyavko, D. P. (2016). Kolebaniya i vibroaktivnost' elementov mashin. St. Petersburg. (in Russian).

10. Zubarev, Yu. M. (2021). Dinamicheskie protsessy v tekhnologii mashinostroeniya. Osnovy konstruirovaniya mashin. Moscow. (in Russian).

11. Il'in, M. M., Kolesnikov, K. S., & Saratov, Yu. S. (2003). Teoriya kolebanii. Moscow. (in Russian).

12. Kel'zon, A. S. (1977). Raschet i konstruirovanie rotornykh mashin. Leningrad. (in Russian).

13. Kirsanov, M. N. (2011). Praktika programmirovaniya v sisteme Maple. Moscow. (in Russian).

14. Konyaev, Yu. S., & Safina, G. F. (2023). Issledovaniya po pruzhinno-massovoi modeli raketnogo dvigatelya tverdogo topliva. In Fundamental'naya matematika i ee prilozheniya v estestvoznanii: In *Materialy Mezhdunarodnoi nauchnoi konferentsii.* (pp. 16-16). (in Russian).

15. Safina, G. F. (2022). Vliyanie parametrov rotora sinkhronnogo dvigatelya turbomashiny na chastoty ego kolebanii. *Inzhenernaya fizika,* (10), 32-38. (in Russian).

Работа поступила в редакцию 04.04.2024 г.

Принята к публикации 16.04.2024 г.

Ссылка для цитирования:

Сафина Г. Ф., Коняев Ю. С. Применение математического пакета Maple к поиску частот колебаний раздаточного редуктора // Бюллетень науки и практики. 2024. Т. 10. №5. С. 35-39. https://doi.org/10.33619/2414-2948/102/04

Cite as (APA):

Safina, G., & Konyaev, Yu. (2024). Application of Maple Mathematical Package to Search for Transfer Gear Oscillation Frequencies. *Bulletin of Science and Practice, 10*(5), 35-39. (in Russian). https://doi.org/10.33619/2414-2948/102/04