УДК 517.95 https://doi.org/10.33619/2414-2948/102/02

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ МОДЕЛЬНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С НЕЛОКАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ I РОДА

©Асылбеков Т. Д., *канд. физ.-мат. наук, Ошский государственный университет, г. Ош, Кыргызстан, atd5929@mail.ru*
©Апжапарова У. А., *Ошский государственный университет, г. Ош, Кыргызстан, aua1959@mail.ru*
©Арапбай кызы А., *Ошский государственный университет, г. Ош, Кыргызстан, aksana.00.05.01@gmai.com*
©Хасанбай кызы У., *Ошский государственный университет, г. Ош Кыргызстан, uulbubukhasanbaykyzy@gmail.com*

BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR A MODEL HYPERBOLIC EQUATION OF THE THIRD ORDER WITH NON-LOCAL CONDITIONS OF THE FIRST KIND

©Asylbekov T., *Ph.D., Osh State University, Osh, Kyrgyzstan, atd5929@mail.ru*
©Abzhaparova U., *Osh State University, Osh, Kyrgyzstan, aua1959@mail.ru*
©Arapbai kyzy A., *Osh State University, Osh, Kyrgyzstan, aksana.00.05.01@gmai.com*
©Khasanbai kyzy U., *Osh State University, Osh, Kyrgyzstan, uulbubukhasanbaykyzy@gmail.com*

Аннотация. Рассматриваются нелокальные задачи I рода для модельного гиперболического уравнения третьего порядка. Представлено доказательство разрешимости нелокальных задач I рода для модельного гиперболического уравнения третьего порядка. Методом функции Римана задача приведена к интегральным уравнениям Вольтерра второго рода. Методом интегральных уравнений доказано существование единственного решения нелокальные задачи I рода. Полученное решение нелокальных задач I рода позволяет описать процесс влагопереноса в почвогрунтах, передачи тепла в гетерогенной среде, фильтрации жидкости в пористых средах.

Abstract. Considers nonlocal problems of the first kind for a model third-order hyperbolic equation. The main goal of the article is to prove the solvability of nonlocal problems of the first kind for a model third-order hyperbolic equation. Using the Riemann function method, the problem is reduced to Volterra integral equations of the second kind. Using the method of integral equations, the existence of a unique solution to nonlocal problems of the first kind is proven. The resulting solution to nonlocal problems of the first kind makes it possible to describe the process of moisture transfer in soils, heat transfer in a heterogeneous medium, and fluid filtration in porous media.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение третьего порядка, гиперболическое уравнение, функция Римана, интегральное уравнение.

Keywords: third order differential equation, hyperbolic equation, Riemann function, integral equation.

Исследование влагопереноса в почвогрунтах, передачи тепла в гетерогенной среде, фильтрации жидкости в пористых средах, приводят к изучению уравнениям в частных производных гиперболического типа третьего порядка [1–3].

Известно, что решение выше указанных и многих прикладных задач биологии, механики, физики сводится к исследованию локальных и нелокальных краевых задач для уравнений третьего порядка гиперболического типа. Краевые задачи для модифицированного уравнения влагопереноса исследованы в работах [4, 5].

Нелокальные задачи для гиперболических уравнений третьего порядка исследованы в работах [6].

Краевые задачи для различных уравнений гиперболического типа третьего порядка изучены в работах [7]. Однако мало исследованы некоторые виды общих уравнений третьего порядка гиперболического типа, обеспечивающих существование и единственность решения соответствующих задач. Локальные, нелокальные задачи для уравнений в частных производных третьего, четвертого порядков гиперболического типа изучены в работах Л. С. Пулькиной, М. Х. Шханукова, А. Сопуева и их учеников [4, 5, 8–13].

В данной работе исследованы нелокальные задачи I рода в области $D=\{(x,y):0\le x\le l,0\le y\le h\}$ для модельного гиперболического уравнения третьего порядка, решения которых получены в явном виде. Полученные представления могут применяться при решении вызываемых большой практический и теоретический интерес различных биологических и физических задач.

Постановка задачи. В области D рассмотрим нелокальную задачу I рода для модельного уравнения

$$u_{xxy}(x,y)+cu(x,y)=f(x,y), \tag{1}$$

где

$$f(x,y),u(x,y)\in C(\bar{D}),\ u(x,y)\in C^{2+1}(D). \tag{2}$$

Задача 1. Найти в области D решение уравнения (1), удовлетворяющее нелокальным условиям I рода:

$$\int_0^h K(y)u(x,y)dy=0, \tag{3}$$

$$u(0,y)=\varphi_1(y),\ 0\le x\le h, \tag{4}$$

$$u_x(0,y)=\varphi_2(y),\ 0\le x\le h, \tag{5}$$

где $\varphi_i(y), i=1,2, K(y)-$ заданные гладкие функции.

Разрешимость задачи

Сначала рассмотрим вспомогательную задачу.

Задача Гурса (Вспомогательная задача). Найти в области D решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям (4), (5) и

$$u(x,y)=\psi(y),\ 0\le y\le l, \tag{6}$$

где $\psi(x)$ — пока неизвестная функция, причем $\varphi_i(y)\in C^1[0,h], i=1,2, \psi(x)\in C^2[0,l],$ и условиям согласования

$$\varphi_1(0)=\psi(0),\varphi_2(0)=\psi'(0), \tag{7}$$

Т. 10. №5. 2024
https://doi.org/10.33619/2414-2948/102

Для удобства перейдем к переменным ξ,η . $\forall M(x,y)\in D,$ имеем область $D_1\subset D,\ D_1=\{0\le\xi\le x, 0\le\eta\le y\}$. Через точку $M(x,y)$ проведем две прямые, параллельные координатным осям. Имеет место тождество:

$$vL(u)-uL^*(v)=\frac{\partial Q}{\partial\xi}-\frac{\partial P}{\partial\eta} \tag{8}$$

где $L^*(v)=v_{xxy}+cu$ сопряженное уравнение, а $Q=vu_{\xi\eta}-v_\xi u_\eta,\ P=v_{\xi\xi}u.$

Используя формулу Грина, будем интегрировать тождество (8) по контуру ∂D_1 и получим представление решение задачи Гурса (4) - (6) в виде

$$u(x,y)=v_\xi(x,y;x,0)\psi(x)+\int_0^x v_{\xi\xi}(x,y;\xi,0)\psi(\xi)d\xi-\int_0^y[v_\xi(x,y;0,\eta)\varphi_1'(\eta)-$$
$$-v_\xi(x,y;0,\eta)\varphi_2'(\eta)+\int_0^\xi d\xi\int_0^\eta v(x,y;\xi,\eta)f(\xi,\eta)d\eta, \tag{9}$$

где $v(x,y;\xi,\eta)$ — функция Римана, удовлетворяющую условиям:

$v(x,y;\xi,\eta)$ — решение сопряженной задачи.

$$\begin{cases} L(v)=v_{\xi\xi\eta}-cv=0, \\ v(x,y;x,\eta)=0, v_\xi(x,y;x,\eta)\big|_{\eta=y}=1,\ v(x,y;\xi,y)=\omega(x,y,\xi), \end{cases} \tag{10}$$

где $\omega(x,y,\xi)$ — решение следующей задачи Коши

$$\begin{cases} v_{\xi\xi}(x,y;\xi,y)=0, \\ v(x,y;\xi,y)\big|_{\xi=x}=0,\ v_\xi(x,y;\xi,y)\big|_{\xi=x}=1. \end{cases} \tag{11}$$

Интегрируя уравнение $v_{\xi\xi}(x,y;\xi,y)=0$ дважды по ξ в пределах от x до ξ и учитывая свойства функции, получили:

$$v(x,y;\xi,y)=\xi-x, \tag{12}$$

тогда из (10) получили следующее интегральное уравнение

$$v(x,y;\xi,\eta)=\xi-x-c\int_x^\xi d\xi_1\int_\eta^y(\xi-\xi_1)v(\xi,\eta;\xi_1,\eta_1)d\eta_1. \tag{13}$$

Решение уравнения (13) нашли методом последовательных приближений [9]:

$$v=v_0+\lambda v_1+\lambda^2v_2+...+\lambda^n v_n+...,$$

где $\lambda-$ действительный параметр.

Из (13) последовательно определили $v_0,v_1,v_2,...,v_n,...$.

Т. 10. №5. 2024
https://doi.org/10.33619/2414-2948/102

Например, $v_0 = \xi - x,\ v_1 = -\frac{2}{3!}c(\xi - x)^3(\eta - y).$ Аналогично нашли $v_2, v_3, \ldots$.В конечном результате получили следующую функцию Римана:

$$v(x,y;\xi,\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n(-1)^n c^n}{n!(2n+1)!}(\xi - x)^{2n+1}(\eta - y)^n \tag{14}$$

Нетрудно проверить, что функция (14) удовлетворяет всем условиям задачи (10), (11).

Учитывая условия (3) из (9), имеем:

$$\psi(x)\int_0^h K(y)v_\xi(x,y;x,0)dy + \int_0^x \left(\int_0^h K(y)v_{\xi\xi}(x,y;\xi,0)dy \right) \psi(\xi)d\xi = g(x) \tag{15}$$

$$g(x) = -\int_0^h K(y)u(x,y)(\int_0^y [v_\xi(x,y;0,\eta)\varphi_1'(\eta) - v_\xi(x,y;0,\eta)\varphi_2'(\eta) + +\int_0^\xi d\xi \int_0^\eta v(x,y;\xi,\eta)f(\xi,\eta)d\eta)dy$$

.

$$\int_0^h K(y)v_\xi(x,y;x,0)dy \neq 0 \tag{16}$$

то (15) можно привести к интегральным уравнениям Вольтерра второго рода. Используя метод последовательных приближений найдя $\psi(x)$ и поставляя в (9) получим решение нелокальную задачу 1.

Теорема 1. Если выполняются условий (2)–(5) и (16) то уравнение (1) в области *D* имеет единственное решение. Из способа получения решения задачи следует, что поставленные задачи могут иметь лишь единственное решение, так как мы получили для неизвестных функций явные и однозначно определенные выражения, не делая никаких предположений о них, кроме их существования [14, 15].

В заключение отметим, что задачи методом функции Римана, могут быть обобщены для гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа третьего порядка.

Список литературы:

1. Баренблатт Г. И., Желтов Ю. П., Кочина И. Н. Основы теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах // Прикладная математика и механика. 1960. Т. 24. №5. С. 1286-1303.

2. Дзекцер Е. С. Уравнение движения подземных вод со свободной поверхностью в многослойных средах // Доклады Академии наук. 1975. Т. 220. №3. С. 540-543.

3. Рубинштейн Л. И. К вопросу о процессе распространения тепла в гетерогенных средах // Известия АН СССР. Серия география. 1948. Т. 12. №1. С. 27-45.

4. Шхануков М. Х. О некоторых краевых задачах для уравнения третьего порядка, возникающих при моделировании фильтрации жидкости в пористых средах // Дифференциальные уравнения. 1982. Т. 18. №4. С. 689-699.

5. Шхануков-Лафишев М. Х. Об одном методе решения краевых задач для уравнений третьего порядка // Доклады Академии наук. 1982. Т. 265. №6. С. 1327-1330.

6. Водахова В. А. Об одной краевой задаче для уравнения третьего порядка с нелокальным условием АМ Нахушева // Дифференциальные уравнения. 1983. Т. 19. №1. С. 163-166.

7. Джамалов С. З. О корректности одной нелокальной краевой задачи с постоянным коэффициентом для многомерного уравнения смешанного типа второго порядка // Математические заметки СВФУ. 2017. Т. 24. №4. С. 17-27. https://doi.org/10.25587/SVFU.2018.4.11313 EDN: YUMSXL

8. Сопуев А. Краевые задачи для уравнений четвертого порядка и уравнений смешанного типа: автореф. дисс. ... д-ра физ.-мат. наук. Бишкек, 1996. 31 с.

9. Асылбеков Т. Д. Начально-краевые задачи для гиперболических уравнений четвертого порядка: дисс. … канд. физ.-мат. наук. Бишкек, 2003. 130 с.

10. Асылбеков Т. Д., Нуранов Б. Ш., Таалайбеков Н. Т. Нелокальные краевые задачи типа Бицадзе-Самарского для гиперболического уравнения четвертого порядка с разрывными коэффициентами // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. 2019. №3. С. 11-17.

11. Асылбеков Т. Д., Нуранов Б. Ш., Таалайбеков Н. Т. Нелокальные краевые задачи с интегральными условиями для модельного гиперболического уравнения четвертого порядка с трехкратными характеристиками // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. 2019. №3. С. 22-29.

12. Пулькина Л. С. Краевые задачи для гиперболического уравнения с нелокальными условиями I и II рода // Известия высших учебных заведений. Математика. 2012. №4. С. 74-83.

13. Асылбеков Т. Д., Нуранов Б. Ш. Аналог задачи Дарбу для гиперболических уравнений третьего порядка в прямоугольно треугольной области // Бюллетень науки и практики. 2024. Т. 10. №1. С. 23-30. https://doi.org/10.33619/2414-2948/98/02

14. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. Т. 2. М.-Л.: ГИТТЛ, 1951. 544 с.

15. Лыков А. В., Михайлов Ю. А. Теория тепло- и массопереноса. М.–Л.: Госэнергоиздат, 1963. 536 с.

References:

1. Barenblatt, G. I., Zheltov, Yu. P., & Kochina, I. N. (1960). Osnovy teorii fil'tratsii odnorodnykh zhidkostei v treshchinovatykh porodakh. *Prikladnaya matematika i mekhanika, 24*(5), 1286-1303. (in Russian).

2. Dzektser, E. S. (1975). Uravnenie dvizheniya podzemnykh vod so svobodnoi poverkhnost'yu v mnogosloinykh sredakh. In *Doklady Akademii nauk, 220*(3), 540-543. (in Russian).

3. Rubinshtein, L. I. (1948). K voprosu o protsesse rasprostraneniya tepla v geterogennykh sredakh. *Izvestiya AN SSSR. Seriya geografiya, 12*(1), 27-45. (in Russian).

4. Shkhanukov, M. Kh. (1982). O nekotorykh kraevykh zadachakh dlya uravneniya tret'ego poryadka, voznikayushchikh pri modelirovanii fil'tratsii zhidkosti v poristykh sredakh. *Differentsial'nye uravneniya, 18*(4), 689-699. (in Russian).

5. Shkhanukov-Lafishev, M. Kh. (1982). Ob odnom metode resheniya kraevykh zadach dlya uravnenii tret'ego poryadka. In *Doklady Akademii nauk, 265*(6), 1327-1330. (in Russian).

6. Vodakhova, V. A. (1983). Ob odnoi kraevoi zadache dlya uravneniya tret'ego poryadka s nelokal'nym usloviem AM Nakhusheva. *Differentsial'nye uravneniya, 19*(1), 163-166. (in Russian).

7. Dzhamalov, S. Z. (2018). On correctness of nonlocal edge problem with constant coefficient for multidimensional second order equation of mixed type. *Zhurnal Matematicheskie Zametki SVFU,* 4. https://doi.org/10.25587/svfu.2018.4.11313

8. Sopuev, A. (1996). Kraevye zadachi dlya uravnenii chetvertogo poryadka i uravnenii smeshannogo tipa: avtoref. diss. ... d-ra fiz.-mat. nauk. Bishkek. (in Russian).

9. Asylbekov, T. D. (2003). Nachal'no-kraevye zadachi dlya giperbolicheskikh uravnenii chetvertogo poryadka: diss. … kand. fiz.-mat. nauk. Bishkek. (in Russian).

10. Asylbekov, T. D., Nuranov, B. Sh., & Taalaibekov, N. T. (2019). Nelokal'nye kraevye zadachi tipa Bitsadze-Samarskogo dlya giperbolicheskogo uravneniya chetvertogo poryadka s razryvnymi koeffitsientami. *Nauka, novye tekhnologii i innovatsii Kyrgyzstana,* (3), 11-17. (in Russian).

11. Asylbekov, T. D., Nuranov, B. Sh., & Taalaibekov, N. T. (2019). Nelokal'nye kraevye zadachi s integral'nymi usloviyami dlya model'nogo giperbolicheskogo uravneniya chetvertogo poryadka s trekhkratnymi kharakteristikami. *Nauka, novye tekhnologii i innovatsii Kyrgyzstana,* (3), 22-29. (in Russian).

12. Pul'kina, L. S. (2012). Kraevye zadachi dlya giperbolicheskogo uravneniya s nelokal'nymi usloviyami I i II roda. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Matematika,* (4), 74-83. (in Russian).

13. Asylbekov, T., & Nuranov, B. (2024). An Analogue of the Darboux Problem for Hyperbolic Equations of the Third Order in a Rectangular Triangular Domain. *Bulletin of Science and Practice, 10*(1), 23-30. (in Russian). https://doi.org/10.33619/2414-2948/98/02

14. Kurant, R., & Gil'bert, D. (1951). Metody matematicheskoi fiziki. 2. Moscow. (in Russian).

15. Lykov, A. V., & Mikhailov, Yu. A. (1963). Teoriya teplo i massoperenosa. Moscow. (in Russian).

Работа поступила в редакцию 29.03.2024 г.

Принята к публикации 06.04.2024 г.

Ссылка для цитирования:

Асылбеков Т. Д., Апжапарова У. А., Арапбай кызы А., Хасанбай кызы У. Краевые задачи для модельного гиперболического уравнения третьего порядка с нелокальными условиями I рода // Бюллетень науки и практики. 2024. Т. 10. №5. С. 23-28. https://doi.org/10.33619/2414-2948/102/02

Cite as (APA):

Asylbekov, T., Abzhaparova, U., Arapbai kyzy, A., & Khasanbai kyzy, U. (2024). Boundary Value Problems for a Model Hyperbolic Equation of the Third Order with Non-local Conditions of the First Kind. *Bulletin of Science and Practice, 10*(5), 23-28. (in Russian). https://doi.org/10.33619/2414-2948/102/02