УДК 517.928 https://doi.org/10.33619/2414-2948/101/02

ВЛИЯНИЕ ФУНКЦИИ ДИРАКА К ЗАТЯГИВАНИЮ ПОТЕРИ И УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ЗАДАЧИ

©Акматов А. А., *SPIN-код 8377-0954, Ошский государственный университет, г. Ош, Кыргызстан, abdilaziz_akmatov@mail.ru*
©Каламбай кызы Ш., *Ошский государственный университет, г. Ош, Кыргызстан, Shirin.kalambaeva@gmail.com*
©Сражидин уулу Н., *Ошский государственный университет, г. Ош, Кыргызстан, musaev56@gmail.com*

INFLUENCE OF THE DIRAC FUNCTION ON LOSS PROGRESSION STABILITY OF SOLUTIONS TO A SINGULARLY PERTURBED PROBLEM

©Akmatov A., *SPIN-code 8377-0954, Osh State University, Osh, Kyrgyzstan, abdilaziz_akmatov@mail.ru.*
©Kalambai kyzy Sh., *Osh State University, Osh, Kyrgyzstan, Shirin.kalambaeva@gmail.com*
©Srazhidin uulu N., *Osh State University, Osh, Kyrgyzstan, musaev56@gmail.com*

Аннотация. Неоднородная часть сингулярно возмущенной задачи тоже влияет к затягиванию потери устойчивости. Если неоднородная часть будет обобщенной сингулярной функцией Дирака, то она определяет поведения решения сингулярной задачи. Исследуется этот случай. Покажем особенности исследуемой задачи. В результате получим асимптотическую оценку. Задача исследуется в действительной области. Это главное преимущество, при обыкновенной неоднородности оценка решения получается в комплексной области.

Abstract. The inhomogeneous part of the singularly perturbed problem affects and prolongs the loss of stability. If the inhomogeneous part is a generalized singular Dirac function, which determines the behavior of solutions to the singular problem. The features of the problem under study are shown. As a result, an asymptotic estimate was obtained. The problem is studied in a real domain.

Ключевые слова: сингулярное возмущение, начальная точка, затягивания потери устойчивости, асимптотика, малый параметр.

Keywords: singular perturbation, starting point, tightening of loss of stability, asymptotic, small parameter.

В работе неоднородная часть будет обобщенная сингулярная функция Дирака. Эта функция сильно влияет к явлению затягиванию потери устойчивости решений сингулярно возмущенной задачи. *Цель исследования:* доказать асимптотическую близость решения сингулярно возмущенного дифференциального уравнения и соответствующего невозмущенного уравнения в случае смены устойчивости

Материалы и методы исследования

Рассмотрим задачу

$$\varepsilon x'(t,\varepsilon)=\lambda(t)x(t,\varepsilon)+\varepsilon[\delta(t-a)+f(t,x(t,\varepsilon))], \tag{1}$$

$$x(t_0,\varepsilon)=x^0(\varepsilon),\ |x^0(\varepsilon)|=O(\varepsilon) \tag{2}$$

где $0<\varepsilon$ — малый параметр, $t\in[t_0,T]$, $x(t,\varepsilon)$ — искомая неизвестная функция, $\delta(t-a)$ — функция Дирака которая имеет значение только в точке *a*.

Для решения правой части поставленной задачи (1) требуется выполнение следующих условий:

U1. $g(t)$, $f(t,x)\in Q(\tilde{H})$ — пространство аналитических функций в области $\tilde{H}$, $f(t,0)\equiv 0$, $|f(t,\tilde{x})-f(t,\tilde{\tilde{x}})|\le M\times|\tilde{x}-\tilde{\tilde{x}}|$, $0<M$ — некоторая постоянная.

U2. $\lambda(t)=\alpha(t)+i\beta(t)$, $\operatorname{Re}\lambda(t)=\alpha(t)<0$, $-\infty<t<0$; $\operatorname{Re}\lambda(T_0)=\alpha(T_0)=0$, $\beta(T_0)\ne 0$, $\operatorname{Re}\lambda(t)=\alpha(t)>0$, $0<t<+\infty$.

Имеет место следующая теорема:

Теорема. Пусть выполнены условия U1-U2. Тогда $\forall t\in[t_0,T]$ решение задачи (1)-(2) существует, единственно и для него справедлива оценка

$$|x(t,\varepsilon)|\le C|x_1|, \tag{3}$$

где $C-const$.

Доказательство. Задачу (1)-(2) заменим интегральным уравнением

$$x(t,\varepsilon)=x^0(\varepsilon)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}\lambda(s)ds\right)+\int_{t_0}^{t}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^{t}\lambda(s)ds\right)\cdot[\delta(\tau-a)+f(\tau,x(\tau,\varepsilon))]d\tau \tag{4}$$

Для доказательства существования решения уравнения (4) применим метод последовательных приближений.

Последовательные приближения определим следующим образом:

$$x_0(t,\varepsilon)\equiv 0, \tag{5}$$

$$x_n(t,\varepsilon)=x^0(\varepsilon)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}\lambda(s)ds\right)+\int_{t_0}^{t}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^{t}\lambda(s)ds\right)\cdot[\delta(\tau-a)+f(\tau,x_{n-1}(\tau,\varepsilon))]d\tau,$$

где $n\in N$.

Далее

$$u(t,t_0)=\operatorname{Re}\int_{t_0}^{t}\lambda(s)ds$$

Определим область $H_0=\{t:u(t,t_0)\le 0\}$.

Из (5) оценим последовательные приближения на замкнутой области H_0. Тогда

Т. 10. №4. 2024
https://doi.org/10.33619/2414-2948/101

$$x_1(t,\varepsilon) = x^0(\varepsilon)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}\lambda(s)ds\right) + \int_{t_0}^{t}\delta(\tau-a)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^{t}\lambda(s)ds\right)d\tau.$$

Отсюда имеем:

$$x_1(t,\varepsilon) = x^0(\varepsilon)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}\lambda(s)ds\right) + \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{a}^{t}\lambda(s)ds\right).$$

Здесь учтено что,

$$\int_{t_0}^{t}\delta(\tau-a)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^{t}\lambda(s)ds\right)d\tau = \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{a}^{t}\lambda(s)ds\right).$$

Определим модуль решений

$$|x_1(t,\varepsilon)| \le \left|x^0(\varepsilon)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}\lambda(s)ds\right) + \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{a}^{t}\lambda(s)ds\right)\right|.$$

Будет пятеро случаи:

1). Если $t_0 < a$ то длину задержки решений определяет величина

$$\left|x^0(\varepsilon)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}\lambda(s)ds\right)\right|;$$

2). Если $t_0 > a$ то длину задержки решений определяет величина

$$\left|\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{a}^{t}\lambda(s)ds\right)\right|;$$

3). Если $t_0 = a$ то длину задержки тоже определяет величина

$$\left|\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{a}^{t}\lambda(s)ds\right)\right|;$$

4). Если $a \to \infty$, то функция Дирака будет $\delta(t-a) = 0$ и длину задержки решений определяет величина

$$\left|x^0(\varepsilon)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}\lambda(s)ds\right)\right|.$$

5). Если $a = 0$, то длину задержки определяют величина

$$\left|\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{0}^{t}\lambda(s)ds\right)\right|.$$

Это означает что, в этом случае явления задержки потери устойчивости не выполняется.

Отсюда появится ограничение на постоянную a. Этот случай не будем рассматривать.

В остальном случае имеет места оценка $t \in H_0$:

$$\left|x_1(t,\varepsilon)\right| \le C\exp\left(\frac{u(t,t_0)}{\varepsilon}\right), \tag{6}$$

где $0<C-const$, $u(t,t_0)=\operatorname{Re}\int_{t_0}^{t}\lambda(s)ds$.

Если на оценку влияет величина

$$\left|\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_a^t\lambda(s)ds\right)\right|,$$

оценка (6) верна для отрезки $t_0+\alpha(\varepsilon)\le t\le T-\alpha(\varepsilon)$, $\alpha(\varepsilon)\to 0$, $\varepsilon\to 0$ и $\varepsilon=o(\alpha(\varepsilon))$.

Второе приближения определяется следующим образом:

$$x_2(t,\varepsilon)=x_1(t,\varepsilon)+\int_{t_0}^{t}x_1(\tau,\varepsilon)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t\lambda(s)ds\right)d\tau.$$

Здесь

$$\int_{t_0}^{t}x_1(\tau,\varepsilon)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t\lambda(s)ds\right)d\tau=M\int_{t_0}^{t}\left[x^0(\varepsilon)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{\tau}\lambda(s)ds\right)+\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_a^{\tau}\lambda(s)ds\right)\right]\times$$

$$\times\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t\lambda(s)ds\right)d\tau.$$

Отсюда

$$M\int_{t_0}^{t}x^0(\varepsilon)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{\tau}\lambda(s)ds\right)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t\lambda(s)ds\right)d\tau=x^0(\varepsilon)M\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}\lambda(s)ds\right)(t-t_0),$$

а также

$$\int_{t_0}^{t}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_a^{\tau}\lambda(s)ds\right)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t\lambda(s)ds\right)d\tau=M\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_a^t\lambda(s)ds\right)(t-t_0).$$

Тогда

$$\left|x_2(t,\varepsilon)\right|\le C\varepsilon\exp\left(\frac{u(t,t_0)}{\varepsilon}\right)[1+M(t-t_0)]+M\exp\left(\frac{u(t,t_0)}{\varepsilon}\right)(t-t_0),$$

При $n=3$ имеем

$$x_3(t,\varepsilon)=x_1(t,\varepsilon)+\int_{t_0}^{t}x_2(\tau,\varepsilon)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t\lambda(s)ds\right)d\tau.$$

Получаем

$$\left|x_3(t,\varepsilon)\right|\le C\varepsilon\exp\left(\frac{u(t,t_0)}{\varepsilon}\right)\left(1+M(t-t_0)+\frac{M^2}{2}(t-t_0)^2\right)+\frac{M^2}{2}\exp\left(\frac{u(t,t_0)}{\varepsilon}\right)(t-t_0)^2;$$

Аналогично

$$x_n(t,\varepsilon)=x_1(t,\varepsilon)+\int_{t_0}^{t}x_{n-1}(\tau,\varepsilon)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t\lambda(s)ds\right)d\tau.$$

Получим

$$|x_n(t,\varepsilon)| \le C\varepsilon \exp\left(\frac{u(t,t_0)}{\varepsilon}\right)\left(1+M(t-t_0)+\frac{M^2}{2}(t-t_0)^2+\ldots+\frac{M^{n-1}}{(n-1)!}(t-t_0)^{n-1}\right)+$$

$$+\frac{M^{n-1}}{(n-1)!}\exp\left(\frac{u(t,t_0)}{\varepsilon}\right)(t-t_0)^{n-1}.$$

Или

$$|x_n(t,\varepsilon)| \le C\varepsilon \exp\left(\frac{u(t,t_0)}{\varepsilon}\right)\exp\left(M(t-t_0)\right)+\frac{M^{n-1}}{(n-1)!}\exp\left(\frac{u(t,a)}{\varepsilon}\right)(t-t_0)^{n-1}.$$

Докажем справедливости оценки для $n+1$. Тогда из (4) имеем

$$x_{n+1}(t,\varepsilon)=x^0(\varepsilon)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}\lambda(s)ds\right)+\int_{t_0}^{t}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^{t}\lambda(s)ds\right)\cdot\left[\delta(\tau-a)+f(\tau,x_n(\tau,\varepsilon))\right]d\tau,$$

$\vee$

$$|x_{n+1}(t,\varepsilon)| \le C\varepsilon \exp\left(\frac{u(t,t_0)}{\varepsilon}\right)\exp\left(M(t-t_0)\right)+\frac{M^{n}}{n!}\exp\left(\frac{u(t,a)}{\varepsilon}\right)(t-t_0)^{n}.$$

Последовательные приближения равномерно ограничены:

$$\forall n \in N: \ |x_n(t,\varepsilon)| \le C|x_1|.$$

Докажем сходимости $\{x_n(t,\varepsilon)\}$:

$$x_n(t,\varepsilon)=x_1(t,\varepsilon)+\left(x_2(t,\varepsilon)-x_1(t,\varepsilon)\right)+\left(x_3(t,\varepsilon)-x_2(t,\varepsilon)\right)+\ldots+\left(x_n(t,\varepsilon)-x_{n-1}(t,\varepsilon)\right).$$

$$(4)\Rightarrow \quad x_n(t,\varepsilon)-x_{n-1}(t,\varepsilon)=\int_{t_0}^{t}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^{t}\lambda(s)ds\right)\left[f(\tau,x_{n-1}(\tau,\varepsilon))-f\left(\tau,x_{n-2}(\tau,\varepsilon)\right)\right]d\tau.$$

Тогда

$$|x_1(t,\varepsilon)-x_0(t,\varepsilon)| \le C|x_1|,$$

$$|x_2(t,\varepsilon)-x_1(t,\varepsilon)| \le C^2|x_1|,$$

$$|x_3(t,\varepsilon)-x_2(t,\varepsilon)| \le C^3|x_1|,$$

$\ldots,\ \ldots,\ \ldots,$

$$|x_n(t,\varepsilon)-x_{n-1}(t,\varepsilon)| \le C^n|x_1|.$$

По модулю

$$|x_1(t,\varepsilon)+\left(x_2(t,\varepsilon)-x_1(t,\varepsilon)\right)+\left(x_3(t,\varepsilon)-x_2(t,\varepsilon)\right)\ldots+\left(x_n(t,\varepsilon)-x_{n-1}(t,\varepsilon)\right)+\ldots| \le \quad (7)$$

$$\le |x_1(t,\varepsilon)|+|x_2(t,\varepsilon)-x_1(t,\varepsilon)|+|x_3(t,\varepsilon)-x_2(t,\varepsilon)|+\ldots+|x_n(t,\varepsilon)-x_{n-1}(t,\varepsilon|+\ldots \le$$

$$\le |x_1|\left[1+C+C^2+\ldots+C^{n-1}\right].$$

Правая часть равенство (7):

$$|x_n(t,\varepsilon)| \le \frac{|x_1|\left(1-C^{n+1}\right)}{1-C},$$

при $n\to\infty$ имеем

$$|x(t,\varepsilon)| \le \frac{|x_1|}{1-C} \le C|x_1|.$$

Методом от противного докажем единственности решения. Пусть существует другое решения задачи (4):

$$y(t,\varepsilon): y(t,\varepsilon) = x^0(\varepsilon)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}\lambda(s)ds\right) + \int_{t_0}^{t}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^{t}\lambda(s)ds\right)\cdot[\delta(\tau-a)+f(\tau,y(\tau,\varepsilon))]d\tau.$$

$$x_n(t,\varepsilon) - y(t,\varepsilon) = \int_{t_0}^{t}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^{t}\lambda(s)ds\right)[f(\tau,x_{n-1}(\tau,\varepsilon) - f(\tau,y(\tau,\varepsilon)]d\tau,$$

здесь

$$x_n(t,\varepsilon) = x_1(t,\varepsilon) + \int_{t_0}^{t}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^{t}\lambda(s)ds\right)f(\tau,x_{n-1}(\tau,\varepsilon))d\tau.$$

Тогда

$$|x_1(t,\varepsilon) - y(t,\varepsilon)| \le \int_{t_0}^{t}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\operatorname{Re}\int_{\tau}^{t}\lambda(s)ds\right)\cdot|x_0(\tau,\varepsilon) - y(\tau,\varepsilon)|d\tau \le C|x_1|, \tag{8}$$

$$|x_2(t,\varepsilon) - y(t,\varepsilon)| \le \int_{t_0}^{t}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\operatorname{Re}\int_{\tau}^{t}\lambda(s)ds\right)\cdot|x_1(\tau,\varepsilon) - y(\tau,\varepsilon)|d\tau \le C^2|x_1|,$$

$$|x_n(t,\varepsilon) - y(t,\varepsilon)| \le \int_{t_0}^{t}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\operatorname{Re}\int_{\tau}^{t}\lambda(s)ds\right)\cdot|x_{n-1}(\tau,\varepsilon) - y(\tau,\varepsilon)|d\tau \le C^n|x_1|.$$

Здесь выполняется $\forall n \in N$ (8). Тогда в области H_0:

$$\lim_{n\to\infty} C^n|x_1| = 0.$$

Из равенства (8) при $n\to\infty \Rightarrow$ $|x(t,\varepsilon) - y(t,\varepsilon)| \le 0$. $\therefore$, $x(t,\varepsilon) = y(t,\varepsilon)$. Теорема доказано.

Пример. $\lambda(t) = t + i$, $\delta(t-a)$, $a > 0$. Тогда условия U2 выполняется и для решения задачи (1)–(2) верно оценка (3).

Результаты и обсуждение

Когда неоднородность это сингулярная функции Дирака, тогда решение задачи оценивается в действительной области. Здесь второе слагаемое равенство (4) вычисляется за счет функции Дирака. Поэтому появится возможность оценивать решение задачи (1), (2) в действительной области. А также можно выбрать затягивания потери устойчивости достаточно большим.

Выводы

Используя свойства сингулярной функции Дирака можно оценивать решение задачи (1)-(2) в действительной области. Этот случай особенный, потому что неоднородность обобщенная функция. С обыкновенными неоднородными частями исследовано в работах [1-3].

Список литературы:

1. Акматов А. А. Асимптотическое поведение решений сингулярно возмущенных задач в случае неоднократной смены устойчивости // Вестник Ошского государственного университета. 2008. Т. 5. С. 79-82.
2. Акматов А. А. Асимптотическое представление интегралов Френеля в комплексной плоскости // Вестник Ошского государственного университета. 2021. Т. 3. №1. С. 19.
3. Акматов А. А. Исследование решений сингулярно возмущенной задачи // Вестник Ошского государственного университета. 2021. Т. 3. №1. С. 26-33.

References:

1. Akmatov, A. A. (2008). Asimptoticheskoe povedenie reshenii singulyarno vozmushchennykh zadach v sluchae neodnokratnoi smeny ustoichivosti. *Vestnik Oshskogo gosudarstvennogo universiteta, 5*, 79-82. (in Russian).
2. Akmatov, A. A. (2021). Asimptoticheskoe predstavlenie integralov Frenelya v kompleksnoi ploskosti. *Vestnik Oshskogo gosudarstvennogo universiteta, 3*(1), 19. (in Russian).
3. Akmatov A. A. (2021). Issledovanie reshenii singulyarno vozmushchennoi zadachi. *Vestnik Oshskogo gosudarstvennogo universiteta, 3*(1), 26-33. (in Russian).

Работа поступила в редакцию 19.03.2024 г.

Принята к публикации 26.03.2024 г.

Ссылка для цитирования:

Акматов А. А., Каламбай кызы Ш., Сражидин уулу Н. Влияние функции Дирака к затягиванию потери и устойчивости решений сингулярно возмущенной задачи // Бюллетень науки и практики. 2024. Т. 10. №4. С. 21-27. https://doi.org/10.33619/2414-2948/101/02

Cite as (APA):

Akmatov, A., Kalambai kyzy, Sh., & Srazhidin uulu, N. (2024). Influence of the Dirac Function on Loss Progression Stability of Solutions to a Singularly Perturbed Problem. *Bulletin of Science and Practice, 10*(4), 21-27. (in Russian). https://doi.org/10.33619/2414-2948/101/02