

УДК 519.23

https://doi.org/10.33619/2414-2948/100/02

НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ ТЕОРИИ РЯДОВ ПРИ РЕШЕНИИ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

©**Якубова У. Ш.**, ORCID: 0000-0001-5831-7068, Ташкентский государственный экономический университет, г. Ташкент, Узбекистан, umidayakubova@rambler.ru,
©**Мирходжаева Н. Ш.**, ORCID: 0000-0001-5370-9871, Ташкентский государственный экономический университет, г. Ташкент, Узбекистан, najibaxon_7@mail.ru
©**Парпиева Н. Т.**, ORCID: 0000-0002-5695-8619, Ph.D., Профи университет, г. Ташкент, Узбекистан, nparpieva@mail.ru

SOME APPLICATIONS OF SERIES THEORY IN SOLVING ECONOMIC PROBLEMS

©**Yakubova U.**, ORCID: 0000-0001-5831-7068, Tashkent State Economic University, Tashkent, Uzbekistan, umidayakubova@rambler.ru
©**Mirkhodjaeva N.**, ORCID: 0000-0001-5370-9871, Tashkent State Economic University, Tashkent, Uzbekistan, najibaxon_7@mail.ru
©**Parpieva N.**, ORCID: 0000-0002-5695-8619, Ph.D., Professional University, Tashkent, Uzbekistan, nparpieva@mail.ru

Аннотация. В работе приведена формула для нахождения сегодняшней стоимости потока платежей, аннуитета. Рассмотрено применение формулы суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии для нахождения сегодняшней стоимости бесконечной ренты. А также приведены понятия сходимости, расходимости рядов, необходимое условие сходимости и признак сравнения.

Abstract. The paper provides a formula for finding the present value of the payments stream, annuity. The application of the formula of the sum of an infinitely decreasing geometric progression to find the present value of infinite annuity is considered. The concepts of convergence, divergence of series, a necessary condition for convergence, and a sign of comparison are also given in this paper.

Ключевые слова: стоимость платежей, аннуитет, расходимость рядов, признак сравнения.

Keywords: cost of payments, annuity, divergence of series, comparison sign.

В настоящее время умение применять теоретические знания при решении практических задач становится решающим фактором для изучения любой дисциплины. В частности, исходя из многолетнего опыта преподавания бизнес математики в экономическом вузе, авторам представляется необходимым продемонстрировать решение некоторых экономических задач при помощи математического аппарата [1, 2].

Если мы не сможем улучшить математическое образование, учитывая потребности современного мира и студентов, мы находимся в опасности превращения математики во все более «мертвый язык» и отчуждения групп студентов, математический потенциал которых останется неразвитым [3, 4].

Во многих случаях инвестиционных проектов производства вклады возвращаются одинаковым потоком платежей или другим видом выплат. Его называют «аннуитетом». [5].

Например, можно платить фиксированную сумму для гарантированных пенсионных выплат £14,000 в течение 5 лет. Если одинаковый поток платежей возвращается в течение n лет по процентной ставке $i\%$, его сегодняшняя стоимость:

$$PV = a(1+i)^{-1} + a(1+i)^{-2} + \dots + a(1+i)^{-n}$$

Известно, что эта последовательность состоит из геометрической прогрессии. Для ее вычисления необязательно вычислять отдельно каждое слагаемое и затем складывать. Можно воспользоваться компьютером или формулами. Существуют и бессрочные аннуитеты [6, 7]. Например, если по номиналу £100 выплачиваются фиксированные 6%, то денежная сумма £6 называется «вечной» рентой. NPV такого аннуитета по процентной ставке i :

$$\frac{6}{1+i} + \frac{6}{(1+i)^2} + \dots + \frac{6}{(1+i)^n} + \dots$$

здесь n длится бесконечно. Каждый следующий член уменьшается, но сумма этой последовательности продолжает расти. Сумму этой бесконечной последовательности чисел нельзя вообразить без формулы бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

Сумму геометрической прогрессии можно вычислять при помощи калькулятора. Для более сложных случаев приходится вывести формулу.

Сумма первых n членов геометрической прогрессии:

$$GP_n = a + ak + ak^2 + \dots + ak^{n-1} \quad (1)$$

Умножив каждое слагаемое на k ,

$$kGP_n = ak + ak^2 + \dots + ak^{n-1} + ak^n$$

вычтем (1)

$$GP_n = a + ak + ak^2 + \dots + ak^{n-1}$$

Получим

$$(k-1)GP_n = -a + ak^n$$

Отсюда

$$GP_n = \frac{-a + ak^n}{k-1} = \frac{-a(1-k^n)}{k-1} = \frac{(-1)a(1-k^n)}{(-1)(1-k)} = \frac{a(1-k^n)}{1-k}$$

Таким образом, формула суммы геометрической прогрессии:

$$GP_n = \frac{a(1-k^n)}{1-k}$$

В следующих примерах увидим применения формулы к простым последовательностям.

Пример. Найдите сумму геометрической прогрессии, пользуясь формулой.

15 45 135 405 1,215 3,645

Решение. Это прогрессия из 6 членов, каждый следующий получен из предыдущего умножением на 3, т. е. $a = 15$ $k = 3$ $n = 6$.

Из формулы суммы геометрической прогрессии получаем:

$$GP_n = \frac{a(1-k^n)}{1-k} = \frac{15(1-3^6)}{-2} = \frac{15(1-729)}{-2} = \frac{15(-728)}{-2} = 15 \times 364 = 5,460$$

Обозначим через R годовые выплаты на срок n лет с процентной ставкой i , тогда

$$PV = \frac{R}{1+i} + \frac{R}{(1+i)^2} + \dots + \frac{R}{(1+i)^n}$$

Первый член этой прогрессии

$$a = \frac{R}{1+i},$$

знаменатель

$$k = \frac{1}{1+i}.$$

Отсюда

$$PV = \frac{a(1-k^n)}{1-k} = \frac{\frac{R}{1+i} \left[1 - \left(\frac{1}{1+i} \right)^n \right]}{1 - \frac{1}{1+i}} = \frac{R \left[1 - \frac{1}{(1+i)^n} \right]}{1+i-1} = \frac{R \left[1 - (1+i)^{-n} \right]}{i}$$

Таким образом, для аннуитета:

$$PV = \frac{R \left[1 - (1+i)^{-n} \right]}{i}.$$

Из школьной программы известна задача следующего типа. лягушка сидит на дощечке в центре бассейна. Радиус бассейна 10 м. За сколько прыжков лягушка достигнет края бассейна?

Предполагается, что при каждом прыжке лягушка попадает на дощечку. Пройденный лягушкой путь за n прыжков состоит из геометрической прогрессии:

$$5 + (0,5)5 + (0,5)^2 5 + \dots + (0,5)^{n-1} 5$$

При достаточно больших n эта сумма растет, но никогда не достигает 10 метров. При бесконечно большом числе прыжков общее расстояние достигает 10 метров. Таким образом, имеем геометрический ряд. Этот ряд сходится к 10.

Геометрическая прогрессия может расходиться. Например, последовательность

$$40 \quad 60 \quad 90 \quad 135 \dots$$

можно записать в виде геометрической прогрессии

$$40 \quad 40(1,5) \quad 40(1,5)^2 \quad \dots \quad 40(1,5)^n$$

Видно, что каждый следующий член больше предыдущего. Таким образом, при увеличении числа слагаемых сумма бесконечно увеличивается. Сам последний член $40(1,5)^n$ бесконечно велик. Сходимость или расходимость ряда с геометрической прогрессией зависит от ее знаменателя k .

Если $|k| > 1$, то ряд расходится.

Если $|k| < 1$, то ряд сходится.

Причина использования абсолютного значения в том, что знаменатель прогрессии может быть и отрицательным.

Рассмотрим формулу вычисления суммы сходящейся геометрической прогрессии (например, как вечная рента):

$$GP_n = \frac{a(1-k^n)}{1-k}$$

Это можно записать:

$$GP_n = \frac{a}{1-k} - \left(\frac{a}{1-k}\right)k^n \quad (2)$$

Если $-1 < k < 1$, то $k^n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, поэтому пропадает второй член и сумма равна

$$GP_n = \frac{a}{1-k} \quad (3)$$

Теперь применим формулу (2) к задаче о лягушке. Общее расстояние прыжков

$$\sum_{n=0}^{\infty} 5(0,5)^n$$

В этой геометрической прогрессии $k=0,5$ и $a=5$. Сумма бесконечных слагаемых

$$\frac{a}{1-k} = \frac{5}{1-0,5} = \frac{5}{0,5} = 10 \text{ метров.}$$

Пользуясь этой формулой, можно найти PV для вечного аннуитета. Это объяснит следующий пример.

Пример. Вклад на неограниченный срок составил £6 в год. Если при этом первый платеж производится через 12 месяцев, найдите PV этого аннуитета. Примем инвестиционную процентную ставку вклада за 15%.

Решение.

$$PV = \frac{6}{1,15} + \frac{6}{1,15^2} + \dots + \frac{6}{1,15^n}, \quad \text{здесь } n \rightarrow \infty.$$

В этой геометрической прогрессии $a = \frac{6}{1,5}$ и $k = \frac{1}{1,5}$. Так как $|k| < 1$, прогрессия сходится. Отсюда, можно записать упрощенную формулу для PV:

$$NPV = \frac{a}{1-k} = \frac{\frac{6}{1,15}}{1 - \frac{1}{1,15}} = \frac{6}{1,15 \left(1 - \frac{1}{1,15}\right)} = \frac{6}{1,15 - 1} = \frac{6}{0,15} = \text{£}40$$

Предположим, аннуитет выплачивает $i\%$ годовых, начиная с 12 месяцев, стоимость капитала R . Для этого аннуитета:

$$PV = R(1+i)^{-1} + R(1+i)^{-2} + \dots + R(1+i)^{-n}, \quad \text{здесь } n \rightarrow \infty.$$

Первый член этой геометрической прогрессии $a = R(1+i)^{-1}$ и знаменатель $k = (1+i)^{-1}$. Поэтому, из формулы бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

$$PV = \frac{a}{1-k} = \frac{R(1+i)^{-1}}{1 - (1+i)^{-1}} = \frac{R}{(1+i) \left[1 - (1+i)^{-1}\right]} = \frac{R}{1+i-1} = \frac{R}{i}$$

Таким образом, формула для вычисления PV для вечной ренты:

$$PV = \frac{R}{i}$$

Применив эту формулу в примере, найдем:

$$PV = \frac{6}{0,15} = \text{£}40$$

Эта формула облегчает вычисления.

Определение. Выражение

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \equiv a_1 + a_2 + \dots + a_n, \dots \quad (4)$$

составленное из членов числовой последовательности $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ называется числовым рядом.

Здесь $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ называются членами ряда, а a_n общим членом ряда. Из определения видно, что ряд определяется суммой счетного числа слагаемых, составленных по определенному правилу.

Суммы $S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, \dots, S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n,$

составленные из конечного числа первых членов ряда, называются частичными суммами этого ряда.

Учитывая счетность членов ряда, можно видеть, что сами частичные суммы $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$ составляют числовую последовательность.

Определение. Если последовательность частичных сумм $\{S_n\}$ имеет конечный предел

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а предел S называется суммой ряда и записывается в виде $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$.

Определение. Если последовательность $\{S_n\}$ не обладает конечным пределом (предел бесконечен или не существует), то ряд (3) называется расходящимся.

Например. Исследуйте ряд:

$$b + bq + bq^2 + \dots + bq^{n-1} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} bq^{n-1}, (b \neq 0)$$

Сумма первых n его членов определяется формулой:

$$S_n = \frac{b + bq^n}{1 - q} = \frac{b}{1 - q} + \frac{b}{1 - q} q^n$$

Для суммы этого ряда предыдущие утверждения зависят непосредственно от q .

1) Если $|q| < 1$, т. к. $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$, имеем конечный предел $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{b}{1 - q}$. Т. е. при

$|q| < 1$ ряд сходится, а его сумма вычисляется по формуле $S = \frac{b}{1 - q}$.

2) Если $|q| > 1$, очевидно, $\lim_{n \rightarrow \infty} |q|^n = \infty$. Поэтому при $q < -1$ $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ не существует, при $q > 1$ $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$, и ряд расходится.

3) Если $q=1$, имеет S_n вид $S_n = b + b + \dots + b = b \cdot n$. В этом случае, т.к. $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$, ряд расходится.

4) Если $q=-1$ ряд имеет вид: $b - b + b - b + \dots + (-1)^{n-1} b + \dots$

Для такого ряда $S_n = S_{2m} = 0, S_n = S_{2m+1} = b, (m = 1, 2, 3, \dots)$. А это означает не существование предела $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$. Поэтому и при $q = -1$ ряд расходится.

Теорема. Если ряд (3) сходится, любой его остаток сходится и наоборот, если сходится остаток ряда, он сам тоже сходится.

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, его сумма S , то и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} k a_n$ сходится и его сумма равна $k \cdot S$.

Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся, то и ряды $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ сходятся и имеет место

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

равенство

Необходимое условие сходимости рядов

Теорема. (Необходимое условие сходимости рядов). Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, при стремлении порядкового номера к бесконечности общий член a_n стремится к нулю, т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Следствие. Если для ряда не выполняется условие $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, то ряд расходится.

Например. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{1}{n^2})$ расходится, т.к. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n^2}) = 1 \neq 0$.

Условие $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ является лишь необходимым условием сходимости ряда. Т.е. если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Но при $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ не всегда сходится.

Например, хотя для гармонического ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{4} + \dots$ выполняется

условие $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{n} = 0$, он расходится.

Признак сравнения

Определение. Если для всех $n = 1, 2, 3, \dots$ $a_n > 0$, то ряд

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

называется рядом с положительными членами.

Пусть даны ряды с положительными членами $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Теорема. Если для всех $n=1,2,3,\dots$ $a_n \leq b_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Теорема. Если для всех $n=1,2,3,\dots$ $a_n \leq b_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ тоже расходится.

Пример. Исследовать ряд $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots$.

Решение. Возьмем гармонический ряд $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$, при $n=1,2,3,\dots$

видно, что $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$, и гармонический ряд расходится. Поэтому по теореме, данный ряд расходится.

Список литературы:

1. Якубова У. Ш., Парпиева Н. Т., Мирходжаева Н. Ш. Некоторые применения теории матриц в экономике // Бюллетень науки и практики. 2021. Т. 7. №2. С. 245-253. <https://doi.org/10.33619/2414-2948/63/24>
2. Parpieva N., Yakubova U., Mirkhodjaeva N. The Relevance of Integration of Modern Digital Technologies in Teaching Mathematics // Бюллетень науки и практики. 2020. Т. 6. №4. С. 438-443. <https://doi.org/10.33619/2414-2948/53/51>
3. Якубова У. Ш., Мирходжаева Н. Ш., Парпиева Н. Т. Некоторые применения теории двойственности при решении задач линейного программирования // Бюллетень науки и практики. 2022. Т. 8. №5. С. 621-628. <https://doi.org/10.33619/2414-2948/78/75>
4. Якубова У. Ш., Парпиева Н. Т., Мирходжаева Н. Ш. Некоторые применения графического и симплексного методов решения задач линейного программирования // Бюллетень науки и практики. 2022. Т. 8. №4. С. 490-498. <https://doi.org/10.33619/2414-2948/77/57>
5. Малыхин В. И. Финансовая математика. М., Юнити-дана, 2003.
6. Якубова У. Ш., Парпиева Н. Т., Мирходжаева Н. Ш. Некоторые применения финансовой математики при решении экономических задач // Бюллетень науки и практики. 2023. Т. 9. №2. С. 312-320. <https://doi.org/10.33619/2414-2948/87/36>
7. Якубова У. Ш., Парпиева Н. Т., Мирходжаева Н. Ш. Некоторые заметки о потоках платежей // Бюллетень науки и практики. 2023. Т. 9. №2. С. 321-328. <https://doi.org/10.33619/2414-2948/87/37>

References:

1. Yakubova, U., Parpieva, N., & Mirhojaeva, N. (2021). Some Applications of Matrix Theory in Economics. *Bulletin of Science and Practice*, 7(2), 245-253. (in Russian). <https://doi.org/10.33619/2414-2948/63/24>
2. Parpieva, N., Yakubova, U., & Mirkhodjaeva, N. (2020). The Relevance of Integration of Modern Digital Technologies in Teaching Mathematics. *Bulletin of Science and Practice*, 6(4), 438-443. <https://doi.org/10.33619/2414-2948/53/51>
3. Yakubova, U., Mirkhodjaeva, N., & Parpieva, N. (2022). Some Applications of Duality Theory in Solving Linear Programming Problems. *Bulletin of Science and Practice*, 8(5), 621-628. (in Russian). <https://doi.org/10.33619/2414-2948/78/75>

4. Yakubova, U., Parpieva, N., & Mirkhodjaeva, N. (2022). Some Applications of Graphical and Simplex Methods for Solving Linear Programming Problems. *Bulletin of Science and Practice*, 8(4), 490-498. (in Russian). <https://doi.org/10.33619/2414-2948/77/57>
5. Malykhin, V. I. (2003). *Finansovaya matematika*. Moscow. (in Russian).
6. Yakubova, U., Parpieva, N., & Mirkhodjaeva, N. (2023). Some Applications of Financial Mathematics in Solving Economic Problems. *Bulletin of Science and Practice*, 9(2), 312-320. (in Russian). <https://doi.org/10.33619/2414-2948/87/36>
7. Yakubova, U., Parpieva, N., & Mirkhodjaeva, N. (2023). Some Notes on Payments Streams. *Bulletin of Science and Practice*, 9(2), 321-328. (in Russian). <https://doi.org/10.33619/2414-2948/87/37>

*Работа поступила
в редакцию 18.02.2024 г.*

*Принята к публикации
24.02.2024 г.*

Ссылка для цитирования:

Якубова У. Ш., Мирходжаева Н. Ш., Парпиева Н. Т. Некоторые применения теории рядов при решении экономических задач // Бюллетень науки и практики. 2024. Т. 10. №3. С. 28-35. <https://doi.org/10.33619/2414-2948/100/02>

Cite as (APA):

Yakubova, U., Mirkhodjaeva, N., & Parpieva, N. (2024). Some Applications of Series Theory in Solving Economic Problems. *Bulletin of Science and Practice*, 10(3), 28-35. (in Russian). <https://doi.org/10.33619/2414-2948/100/02>