Т. 10. №3. 2024
https://doi.org/10.33619/2414-2948/100

УДК 517.928 https://doi.org/10.33619/2414-2948/100/01

МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ АСИМПТОТИКИ РЕШЕНИЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ УРАВНЕНИЙ В КОМПЛЕКСНЫХ ОБЛАСТЯХ

©Алыбаев К. С., *ORCID: 0000-0002-7962-534X, SPIN-код: 2396-5503, д-р физ.-мат. наук, Жалал-Абадский государственный университет им. Б.Осмонова, г. Джалал-Абад, Кыргызстан, alybaevkurmanbek@rambler.ru*
©Нурматова М. Н., *ORCID: 0009-0003-4082-1161, SPIN-код: 2628-2591, Жалал-Абадский государственный университет им. Б.Осмонова, г. Джалал-Абад, Кыргызстан, nurmatova_mairamgul@mail.ru*
©Мусакулова Н. К., *ORCID: 0009-0002-8805-331X, SPIN-код: 4710-0522, Жалал-Абадский государственный университет им. Б.Осмонова, г. Джалал-Абад, Кыргызстан, kuralbekovna79@inbox.ru*

METHODS FOR STUDYING ASYMPTOTICS OF SOLUTIONS TO SINGULARLY PERTURBED EQUATIONS IN COMPLEX DOMAINS

©Alybaev K., *ORCID: 0000-0002-7962-534X, SPIN-code: 2396-5503, Dr. habil., Jalal-Abad State University named after B.Osmonov, Jalal-Abad, Kyrgyzstan, alybaevkurmanbek@rambler.ru*
©Nurmatova M., *ORCID: 0009-0003-4082-1161, SPIN-code: 2628-2591, Jalal-Abad State University named after B.Osmonov, Jalal-Abad, Kyrgyzstan, nurmatova_mairamgul@mail.ru*
©Musakulova N., *ORCID: 0009-0002-8805-331X, SPIN-code: 4710-0522, Jalal-Abad State University named after B.Osmonov Jalal-Abad, Kyrgyzstan, kuralbekovna79@inbox.ru*

Аннотация. При исследовании асимптотического поведения решений сингулярно возмущенных уравнений с аналитическими функциями применяются различные методы. Основная цель настоящей работы, провести комплексный анализ применяемых методов и разделить их по группам. Для реализации поставленной цели рассматривается скалярное, нелинейное уравнение первого порядка с начальным условием. Уравнение рассматривается в некотором круге, комплексной плоскости независимой переменной и действительная часть функции — коэффициент, при линейной неизвестной функции меняет свой знак с отрицательного на положительный на части отрезка действительной оси, содержащегося в круге. Вводится понятие области притяжения решения сингулярно возмущенного уравнения к решению нелинейного уравнения (вырожденного уравнения). Поставлена задача доказательства существования области притяжения. В процессе решения поставленной задачи применяемые методы разделены на три группы.

Abstract. When studying the asymptotic behavior of solutions to singularly perturbed equations with analytic functions, various methods are used. The main goal of this work is to conduct a comprehensive analysis of the methods used and divide them into groups. To achieve this goal, a scalar, nonlinear first-order equation with an initial condition is considered. The equation is considered in a certain circle, the complex plane of the independent variable, and the real part of the function — the coefficient, for a linear unknown function, changes its sign from negative to positive on part of the segment of the real axis contained in the circle. The concept of the domain of attraction of the solution of a singularly perturbed equation to the solution of a nonlinear equation (degenerate equation) is introduced. The task is set to prove the existence of a region of attraction. In the process of solving the problem, the methods used are divided into three groups.

Ключевые слова: сингулярно возмущенные уравнения, асимптотическое поведение, комплексный анализ, линии уровня, область притяжения, метод последовательных приближений, метод стационарной фазы, метод Лапласа.

Keywords: singularly perturbed equations, asymptotic behavior, complex analysis, level lines, region of attraction, method of successive approximations, stationary phase method, Laplace method.

При исследовании асимптотического поведения решений сингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений используются различные методы [1–5], сингулярно возмущенные уравнения с аналитическими функциями исследованы в [6–8].

Основная цель настоящей работы, провести комплексный анализ применяемых методов в теории сингулярно возмущенных уравнений с аналитическими функциями и разделить их по группам. Для реализации цели и для простоты изложения рассмотрим уравнение

$$\varepsilon x'(t,\varepsilon) = 2(t+i)x(t,\varepsilon) + \varepsilon(1 + x^2(t,\varepsilon)) \tag{1}$$

с начальным условием

$$x(t_0,\varepsilon) = x^0 \tag{2}$$

где $0 < \varepsilon$ – малый вещественный параметр;

$t_0, t \in \mathcal{D} = \{t \in C, |t| < r_0 \in R\}$, C, R — множества комплексных и вещественных чисел;

$i = \sqrt{-1}$, $t = t_1 + it_2, t_1, t_2$ — действительные переменные, $x(t,\varepsilon)$ — неизвестная скалярная функция, будем считать $t_0 \ll -1$.

Задача: Исследовать асимптотическое поведение решения (1)–(2) в области $\mathcal{D}$.

Если в (1) положить $\varepsilon = 0$, то получим невозмущенное уравнение. Невозмущенное уравнение, соответствующее (1), имеет решение $\xi(t) \equiv 0$.

В [8] введено понятие область притяжения.

Определение 1. Если существует область $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}$ и $x(t,\varepsilon)$ решение задачи (1)–(2) определенное в $\mathcal{D}_0$ и выполняется соотношение

$\forall t \in \mathcal{D}_0 (x(t,\varepsilon) \to \xi(t) \equiv 0$ по $\varepsilon)$,

то $\mathcal{D}_0$ называется областью притяжения решения $x(t,\varepsilon)$ к решению $\xi(t) \equiv 0$.

Таким образом, основная задача заключается в доказательстве существования области притяжения.

Задачу (1)–(2) заменим следующим (для удобства аргументы неизвестной функции будем опускать)

$$x = x^0 exp\frac{F(t)-F(t_0)}{\varepsilon} + \int_{t_0}^{t} (1 + x^2)\, exp\frac{F(t)-F(\tau)}{\varepsilon} d\tau, \tag{3}$$

где $F(t) = (t+i)^2$.

Исследование асимптотического поведения решения уравнения (3) разделим на части:

1. Геометрические построения и выбор путей интегрирования. 2. Аналитическая.

Геометрические построения и выбор путей интегрирования

Т. 10. №3. 2024
https://doi.org/10.33619/2414-2948/100

В данной части, с использованием линии уровней функций $ReF(t), \mathcal{J}mF(t)$, проведем геометрические построения.

Определение 2. Множества

$$(p) = \{t \in \mathcal{D},\ ReF(t) = p - const\},$$
$$(q) = \{t \in \mathcal{D},\ \mathcal{J}mF(t) = p - const\},$$

соответственно называются линии уровня функций $ReF(t)$, $\mathcal{J}mF(t)$.

Функция $F(t)$ не имеет особенностей в области $\mathcal{D}$. Таким образом область $\mathcal{D}$ полностью заполняется, взаимно ортогональными, линиями уровня функций $ReF(t), \mathcal{J}mF(t)$ [9-10]. Для наглядного представления расположения линии уровней рассмотрим линии уровня

$$(p_0) = \{t \in \mathcal{D},\ ReF(t) = 0\},$$
$$(q_0) = \{t \in \mathcal{D},\ \mathcal{J}mF(t) = 0\}.$$

Линии (p_0), (q_0) разветвляются в точке $(0;\ -1)$ (Рисунок 1).

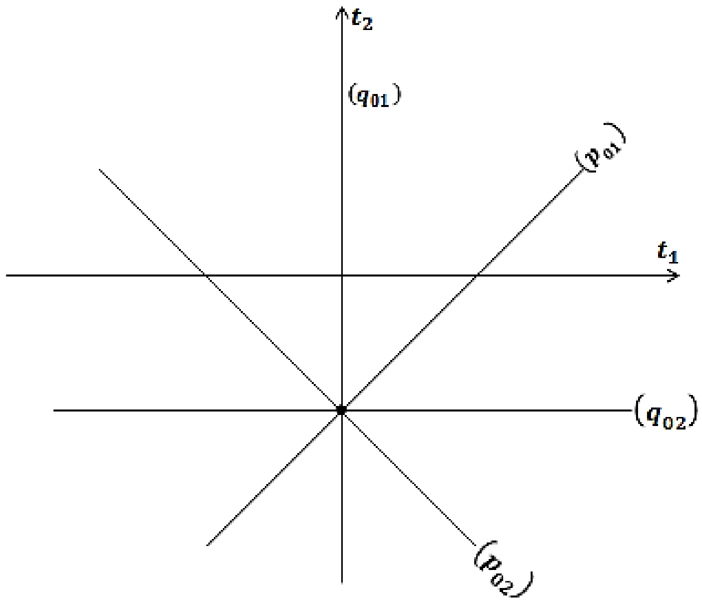

Рисунок 1. Разветвляющиеся линии уровня (p_0), (q_0) и их ветви

Ветви (p_0), (q_0) обозначим (p_{0j}), (q_{0j}) $(j = 1, 2)$.

Линии (p_0), (q_0) область $\mathcal{D}$ разделяет на четыре сектора (Рисунок 2, 3).

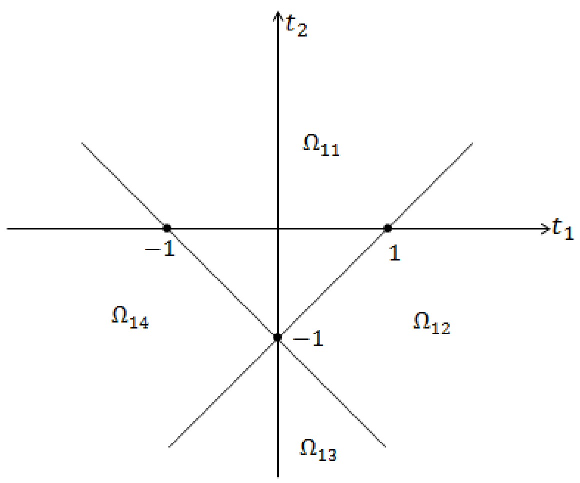

Рисунок 2. Сектора Ω_{1k} $(k = 1,2,3,4)$

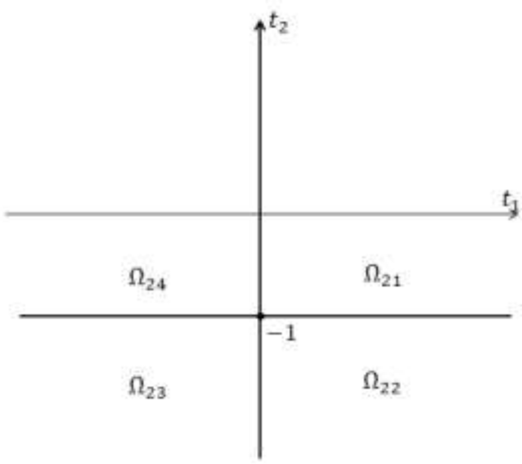

Рисунок 3. Сектора $\Omega_{2k}(k = 1,2,3,4)$.

Нетрудно проверить соотношения

$\forall\, t \in \Omega_{11} \cup \Omega_{13}\ (ReF(t) \leq 0)$, $\forall\, t \in \Omega_{21} \cup \Omega_{23}\ (\mathcal{J}mF(t) \geq 0)$,

$\forall\, t \in \Omega_{12} \cup \Omega_{14}\ (ReF(t) \geq 0)$, $\forall\, t \in \Omega_{22} \cup \Omega_{24}\ (\mathcal{J}mF(t) \leq 0)$.

При этом равенства имеет место только на границах секторов. Линии уровня (p), (q) $(p \neq 0, q \neq 0)$ являются гиперболами (Рисунок 4, 5).

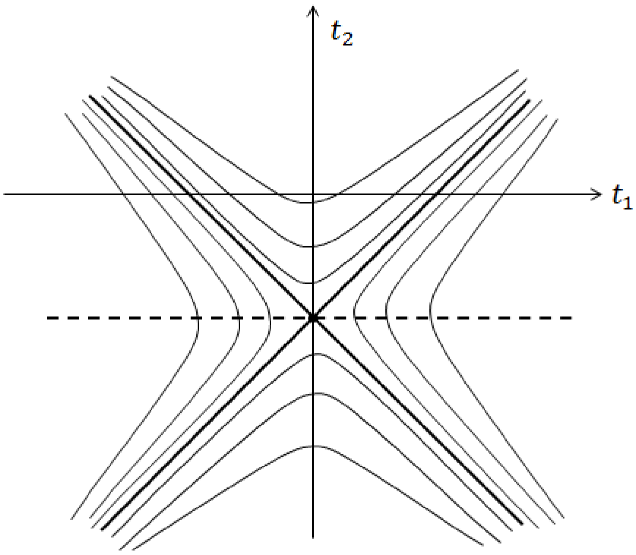

Рисунок 4. Линии (p)

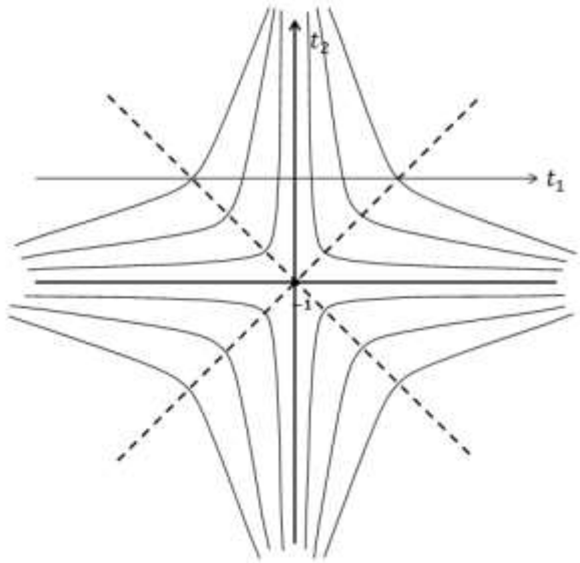

Рисунок 5. Линии (q)

Возьмем прямую $t_2 = \frac{1}{t_0}(t_1 - t_0)$.

Эта прямая проходит через точки $(t_0; 0), (0; -1)$. Часть прямой соединяющая эти точки обозначим (K_1). Часть прямой $\{t_1 - t_2 - 1 = 0\}$ соединяющая точки $(0; -1)$, $(1; 0)$ обозначим (K_2). Область ограниченный (K_1), (K_2) и промежутком $[t_0, 1]$ действительной оси обозначим $\mathcal{D}_0$ (Рисунок 6).

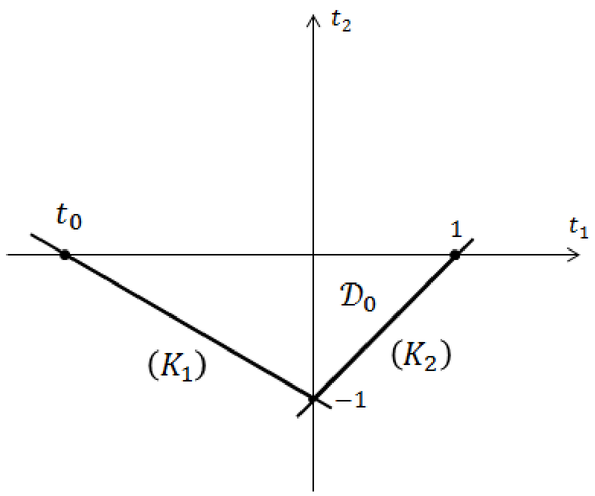

Рисунок 6. Область $\mathcal{D}_0$.

Деление области $\mathcal{D}_0$. $\mathcal{D}_0$ разделим исходя из следующих соображений: как и в теории сингулярно возмущенных уравнений, в окрестности начального значения t_0, должна появиться пограничная область [1–4]; точка $t = -i$, точка поворота [11], следовательно, по мере приближения t к этой точке меняется асимптотическое поведение решения $x(t,\varepsilon)$. Таким образом, надо определить окрестности точек t_0 и $(-i)$.

Определим прямую $\{t_2 = t_1 - t_0 + \varepsilon ln\varepsilon\}$. Эта прямая с прямой $t_2 = \frac{1}{t_0}(t_1 - t_0)$ пересекается в точке $\left(t_0 + \frac{t_0}{1-t_0}\varepsilon ln\varepsilon,\ \frac{1}{1-t_0}\varepsilon ln\varepsilon\right)$, а действительную ось пересекает в точке $(t_0 - \varepsilon ln\varepsilon,\ 0)$.

Далее определим прямые

$(p_1) = \{t_1 - t_2 - 1 + \sqrt{\varepsilon}\} = 0$, $(p_2) = \{t_1 - t_2 - 1 + q\} = 0$,

$(p_3) = \{t_1 + t_2 + 1 - \sqrt{\varepsilon}\} = 0$, $(p_4) = \{t_1 + t_2 + 1 - q\} = 0$.

Определим точки B_j $(j = 1, \dots, 13)$ (Рисунок 7).

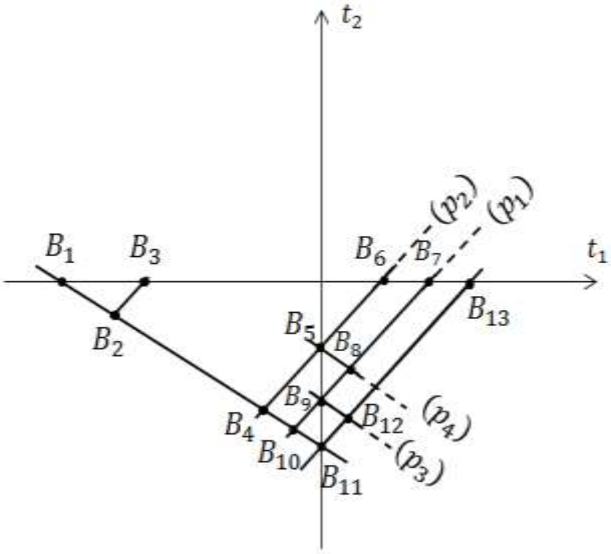

Рисунок 7. Точки B_j $(j = 1, \dots, 13)$.

Треугольник с вершинами $(B_1B_2B_3)$ обозначим $\mathcal{D}_1$; четырехугольники $(B_2B_3B_6B_4) - \mathcal{D}_2$; $(B_4B_5B_8B_{10}) - \mathcal{D}_3$; $(B_5B_6B_7B_8) - \mathcal{D}_4$; $(B_9B_{10}B_{11}B_{12}) - \mathcal{D}_5$; $(B_9B_{12}B_{13}B_7) - \mathcal{D}_6$.

Таким образом $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_5$ окрестности точек t_0 и $(0;\ -1)$.

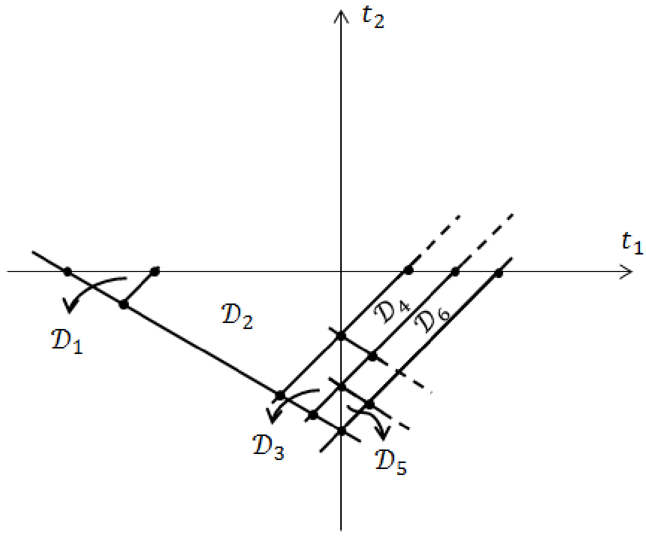

Рисунок 8. Области $\mathcal{D}_j$ $(j = 1, \dots, 6)$

Теперь определим пути интегрирования, которые определяются следующей леммой.

Лемма. Пусть $F(t)\,\epsilon\, Q(\mathcal{D})$ ($\mathcal{D}$ – односвязная, ограниченная, открытая область, существует множество $\{l(t_0,t), l(t_0,t)$ – гладкая или кусочно-гладкая линия Жордана$\}$, где $l(t_0,t)$ – путь соединяющая точки $t_0, t\,\epsilon\,\mathcal{D}$. Если $\forall\, l\,(t_0,t)\,\epsilon\,\{l(t_0,t)\}$ функция $ReF(t)$ не возрастает, то интеграл $|\mathcal{I}(t_0,t,\varepsilon)| = \left|\int_{t_0}^{t} exp\frac{F(t)-F(\tau)}{\varepsilon}d\tau\right|$ ограничен по множеству $\{l(t_0,t)\}$ при $\varepsilon\to 0$.

Доказательство. Пусть $l(t_0,t)\,\epsilon\,\{l(t_0,t)\}$ и она состоит из частей $l_{01}(t_0,\tilde t)$, $l_{02}(\tilde t,t)$.

Пусть $\forall\tau\,\epsilon\, l_{01}(t_0,\tilde t)\ (ReF(\tau) = const)$ и $\forall\tau\,\epsilon\, l_{02}(\tilde t,t)\ (ReF(\tau)$ – убывает).

По условию $F(t)\,\epsilon\, Q(\mathcal{D})$, тогда $ReF(t)$ – гармоническая функция. Известно [6], гармонические функции, свои заданные значения принимают на некоторых линиях и такими линиями являются линии уровня гармонических функций.

Имеем

$$|\mathcal{I}(t_0,t,\varepsilon)| \le \left|\int\limits_{l_{01}(t_0,\tilde t)} exp\frac{F(t)-F(\tau)}{\varepsilon}d\tau\right| + \left|\int\limits_{l_{02}(\tilde t,t)} exp\frac{F(t)-F(\tau)}{\varepsilon}d\tau\right| \le$$
$$\le exp\frac{ReF(t)}{\varepsilon}\int\limits_{l_{01}(t_0,\tilde t)}|d\tau| + \int\limits_{l_{02}(\tilde t,t)} exp\frac{ReF(t)-ReF(\tau)}{\varepsilon}|d\tau|.$$

По условию l_{01} и l_{02} гладкие Жордановы линии [10; 12] и их уравнения можно представить параметрически $\tau=\tau(s), \alpha_1\le s\le\beta_1(l_{01}), \tau=\tau(\sigma), \alpha_2\le\sigma\le\beta_2$, причем $d\tau=\tau'(s)ds,\ d\tau=\tau'(\sigma)d\sigma$ ($|\tau'(s)|,\ \tau'(\sigma)$ – ограничены); $Re\,F(\tau) - const$ на l_{01} и убывает на l_{02} и $Re\,F(t_0)=0$, тогда $Re\,F(t)\le 0$, $Re\,F(t) - Re\,F(\tau)\le 0$.

Из сказанного вытекает ограниченность $|\mathcal{I}(t_0,t,\varepsilon)|$.

1. Если $t\,\epsilon\,\mathcal{D}_1\cup\mathcal{D}_2\cup\mathcal{D}_3\cup\mathcal{D}_5$, то путь состоит из части: $(K_1)\ [t_0,\tilde t]$, части прямой $(\mathcal{P}_1)=\{t_1-t_2-1+\tilde q=0,\ 0\le\tilde q\le 1-t_0\}\ [\tilde t,t]$.

2. Если $t\,\epsilon\,\mathcal{D}_4\cup\mathcal{D}_6$, то путь состоит из части: $(K_1)\ [t_0,(0;\,-1)]$, части $(K_2)\ [(0;\,-1),\tilde t]$, части прямой $(\mathcal{P}_2)=\left\{t_1+t_2+1-\tilde q_1=0, \sqrt{\varepsilon}\le\tilde q_1\le 2\right\}\ [\tilde t,t]$.

1. Заметим кривые (K_1) и (K_2) и пути интегрирования выбраны исходя из расположений линии уровней функции $Re\,F(t)$.

2. Нетрудно проверить, по выбранным путям $Re\,F(t)$ не возрастает.

Аналитическая часть

В данной части исследуем асимптотическое поведение решения уравнения (3) в $\mathcal{D}_0$. К (3) применим метод последовательных приближений, которые определим следующим образом

$$x_m = x^0 exp\frac{F(t)-F(t_0)}{\varepsilon} + \int\limits_{t_0}^{t}(1+x_{m-1}^2)\,exp\frac{F(t)-F(\tau)}{\varepsilon}d\tau, \tag{4}$$
$$x_0\equiv 0, m=1,2,\ldots.$$

Согласно выбранных путей интегрирования оценим последовательные приближения (4).

Сначала рассмотрим случай 1. $t\,\epsilon\,\mathcal{D}_1\cup\mathcal{D}_2\cup\mathcal{D}_3\cup\mathcal{D}_5$.

Оценим первое приближение. Имеем

Т. 10. №3. 2024
https://doi.org/10.33619/2414-2948/100

$$x_1 = x^0 exp\frac{F(t)-F(t_0)}{\varepsilon} + \int_{t_0}^{t} exp\frac{F(t)-F(\tau)}{\varepsilon}d\tau = \tag{5}$$

$$= x^0 exp\frac{F(t)-F(t_0)}{\varepsilon} + \underset{(K_1)}{\int_{t_0}^{\tilde{t}}} exp\frac{F(t)-F(\tau)}{\varepsilon}d\tau + \underset{(\mathcal{P}_1)}{\int_{\tilde{t}}^{t}} exp\frac{F(t)-F(\tau)}{\varepsilon}d\tau$$

1.1. Пусть $t \epsilon \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$. Тогда из (5) получим

$$x_1 = x^0 exp\frac{F(t)-F(t_0)}{\varepsilon} + \int_{t_0}^{\tilde{t}_1} exp\frac{F(t)-\left(1+\frac{i}{t_0}\right)^2\tau_1^2}{\varepsilon}\left(1+\frac{i}{t_0}\right)d\tau_1 +$$

$$+\int_{\tilde{t}_1}^{t_1} exp\frac{F(t)-(\tau_1+i(\tau_1+\tilde{q}))^2}{\varepsilon}(1+i)d\tau_1.$$

Отсюда, переходя к модулю получим

$$|x_1| \le |x^0|\, exp\frac{t_1^2-(t_2+1)^2-t_0^2+1}{\varepsilon} + O(1)\int_{t_0}^{\tilde{t}_1} exp\frac{t_1^2-(t_2+1)^2-\left(1-\frac{1}{t_0^2}\right)\tau_1^2}{\varepsilon}d\tau_1 + \tag{6}$$

$$+O(1)\int_{\tilde{t}_1}^{t_1} exp\frac{t_1^2-(t_2+1)^2+\tilde{q}(2\tau_1+\tilde{q})}{\varepsilon}d\tau_1.$$

В (6) первый интеграл обозначим $\mathcal{I}_1(t_0,t,\varepsilon)$ и к нему применим интегрирование по частям

$$\mathcal{I}_1(t_0,\tilde{t}_1,\varepsilon) = \int_{t_0}^{\tilde{t}_1} exp\frac{t_1^2-(t_2+1)^2-\left(1-\frac{1}{t_0^2}\right)\tau_1^2}{\varepsilon}d\tau_1 =$$

$$= -\frac{\varepsilon}{1-\frac{1}{t_0^2}}\int_{t_0}^{\tilde{t}_1}\frac{1}{2\tau_1}dexp\frac{t_1^2-(t_2+1)^2-\left(1-\frac{1}{t_0^2}\right)\tau_1^2}{\varepsilon} =$$

$$= -\frac{\varepsilon}{1-\frac{1}{t_0^2}}\left\{\left[\frac{1}{2\tilde{t}_1}exp\frac{t_1^2-(t_2+1)^2-\left(1-\frac{1}{t_0^2}\right)\tilde{t}_1^2}{\varepsilon} - \frac{1}{2t_0}exp\frac{t_1^2-(t_2+1)^2-t_0^2+1}{\varepsilon}\right]\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{\tilde{t}_1}\frac{1}{\tau_1^2}exp\frac{t_1^2-(t_2+1)^2-\left(1-\frac{1}{t_0^2}\right)\tau_1^2}{\varepsilon}d\tau_1\right\}.$$

По выбранным путям $ReF(t) = t_1^2-(t_2+1)^2$ не возрастает, тогда

$$exp\frac{t_1^2-(t_2+1)^2-\left(1-\frac{1}{t_0^2}\right)\tau_1^2}{\varepsilon}$$

ограничена при $t_0 \le \tau_1 \le \tilde{t}_1 \le 1-q$ и $(1-q)$ – не зависят от ε. Таким образом

$$\mathcal{I}_1(t_0,\tilde{t}_1,\varepsilon)\leq O(\varepsilon), t\,\epsilon\,\mathcal{D}_1\cup\mathcal{D}_2.$$

Второй интеграл, обозначая $\mathcal{I}_2(\tilde{t}_1,t_1,\varepsilon)$ получим

$$\mathcal{I}_2(\tilde{t}_1,t_1,\varepsilon)=\frac{\varepsilon}{\tilde{q}}\left[exp\frac{t_1^2-(t_2+1)^2+\tilde{q}(2t_1+\tilde{q})}{\varepsilon}-exp\frac{t_1^2-(t_2+1)^2+\tilde{q}(2\tilde{t}_1+\tilde{q})}{\varepsilon}\right].$$

Отсюда учитывая

$$t_1^2-(t_2+1)^2+\tilde{q}(2t_1+\tilde{q})=0,$$
$$t_1^2-(t_2+1)^2+\tilde{q}(2\tilde{t}_1+\tilde{q})\leq 0$$

получим

$$\mathcal{I}_2(\tilde{t}_1,t_1,\varepsilon)\leq O\left(\frac{\varepsilon}{\tilde{q}}\right) \tag{7}$$

Для рассматриваемого случая $q\leq\tilde{q}\leq 1-t_0$, $0\ll q\ll 1$, тогда

$$\mathcal{I}_2(\tilde{t}_1,t_1,\varepsilon)\leq O(\varepsilon), t\,\epsilon\,\mathcal{D}_1\cup\mathcal{D}_2.$$

Рассмотрим $exp\frac{t_1^2-(t_2+1)^2-t_0^2+1}{\varepsilon}$.

Функция $(t_1^2-(t_2+1)^2)$ гармоническая, убывает на границе $\mathcal{D}_1$ от t_0 до $(t_0-\varepsilon ln\varepsilon;0)$, тогда эта функция наибольшее значение принимает в точке $(t_0;0)$, а наименьшее значение в точке $(t_0-\varepsilon ln\varepsilon;0)$.

Учитывая сказанное получим $expln\varepsilon(-2t_0+\varepsilon ln\varepsilon)<\ exp\frac{t_1^2-(t_2+1)^2-t_0^2+1}{\varepsilon}\leq 1, t\,\epsilon\,\mathcal{D}_1$;

$$exp\frac{t_1^2-(t_2+1)^2-t_0^2+1}{\varepsilon}=O(\varepsilon^n), n\epsilon N, t\,\epsilon\,\mathcal{D}_2.$$

На основе проведенных оценок получим

$$|x_1|\leq M_1\begin{cases}1, t\,\epsilon\,\mathcal{D}_1;\\ \varepsilon, t\,\epsilon\,\mathcal{D}_2.\end{cases} \tag{8}$$

1.2. Пусть $t\,\epsilon\,\mathcal{D}_3\cup\mathcal{D}_5$. Для этого случая для (6), проведем соотвествующие вычисления. Сначала рассмотрим $t\,\epsilon\,\mathcal{D}_3$. В этом случае, при оценке интеграла $\mathcal{I}_1(t_0,t,\varepsilon)$, воспользуемся методом Лапласа [10, 13, 14]. Обоснуем применимость метода Лапласа. Рассмотрим функцию

$\varphi(\tau_1)=-\left(1-\frac{1}{t_0^2}\right)\tau_1^2$. $\varphi'(\tau_1)=-2\left(1-\frac{1}{t_0^2}\right)\tau_1>0$ при $t_0\leq\tau_1\leq\tilde{t}_1\leq\sqrt{\varepsilon}\frac{t_0}{1-t_0}$ $(t_0<-1)$, т. е. $t\,\epsilon\,\mathcal{D}_3$.

Таким образом $\varphi(\tau_1)$ своего наибольшего значения достигает в точке $\tau_1=\tilde{t}_1\leq\frac{\sqrt{\varepsilon}\,t_0}{1-t_0}$.

Тогда для $\mathcal{I}_1(t_0,\tilde{t}_1,\varepsilon)$ справедлива асимптотическая оценка

$$\mathcal{I}_1(t_0,\tilde{t}_1,\varepsilon)\leq exp\frac{t_1^2-(t_2+1)^2-\left(1-\frac{1}{t_0^2}\right)\tilde{t}_1^2}{\varepsilon}\cdot\frac{1}{-2\left(1-\frac{1}{t_0^2}\right)\tilde{t}_1}.$$

Функция $(t_1^2-(t_2+1)^2)$ не возрастает, по выбранным путям интегрирования, следовательно

$$t_1^2-(t_2+1)^2-\left(1-\frac{1}{t_0^2}\right)\tilde{t}_1^2\leq 0, \tilde{t}_1\leq\frac{\sqrt{\varepsilon}\,t_0}{1-t_0}.$$

Учитывая это, получим $\mathcal{J}_1(t_0, \tilde{t}_1, \varepsilon) \le O(\sqrt{\varepsilon}), t_0 \le \tilde{t}_1 \le \frac{\sqrt{\varepsilon}\, t_0}{1-t_0}$.

Эта оценка верна для границы (B_4B_{10}) области $\mathcal{D}_3$.

При оценке интеграла $\mathcal{J}_2(\tilde{t}_1, t_1, \varepsilon)$ получается оценка, аналогичная оценке (7). Только в этом случае $\sqrt{\varepsilon} \le \tilde{q} \le q$.

Тогда $\mathcal{J}_2(\tilde{t}_1, t_1, \varepsilon) \le O(\sqrt{\varepsilon})$.

Также $exp\frac{t_1^2-(t_2+1)^2-t_0^2+1}{\varepsilon} = O(\varepsilon^n), n \,\epsilon\, N, t \,\epsilon\, \mathcal{D}_3$.

Подведя итог, получим оценку

$$|x_1| \le M_1\sqrt{\varepsilon}, t \,\epsilon\, \mathcal{D}_3 \tag{9}$$

Если $t \,\epsilon\, \mathcal{D}_5$, то к $\mathcal{J}_1(t_0, \tilde{t}_1, \varepsilon)$ применим метод Лапласа. Только в этом случае $\varphi'(\tau_1) = 0$ при $\tau_1 = 0$ и $\varphi''(0) = -2\left(1 - \frac{1}{t_0^2}\right) < 0$.

Для $\mathcal{J}_1(t_0, \tilde{t}_1, \varepsilon)$ справедлива асимптотическая оценка $\mathcal{J}_1(t_0, \tilde{t}_1, \varepsilon) = exp\frac{t_1^2-(t_2+1)^2}{\varepsilon}\left[\frac{\pi t_0^2 \varepsilon}{4(t_0^2-1)}\right]^{1/2}$.

При $t \,\epsilon\, \mathcal{D}_5$ функция $(t_1^2 - (t_2+1)^2)$ своего наибольшего значения принимает в точке $B_{10}\left(\frac{\sqrt{\varepsilon}\, t_0}{1-t_0}; -1 + \frac{\sqrt{\varepsilon}}{1-t_0}\right)$ и это значение равно $\varepsilon\frac{1+t_0}{1-t_0}$.

Таким образом $\forall t \,\epsilon\, \mathcal{D}_5 \left(exp\frac{t_1^2-(t_2+1)^2}{\varepsilon} \le exp\frac{1+t_0}{1-t_0}\right)$.

На основе проведенных оценок получим $\mathcal{J}_1(t_0, \tilde{t}_1, \varepsilon) \le M_1\sqrt{\varepsilon}, t \,\epsilon\, \mathcal{D}_5$.

Далее, при оценке учтем $\forall t \,\epsilon\, \mathcal{D}_5 \left(exp\frac{t_1^2-(t_2+1)^2+\tilde{q}(2\tau_1+\tilde{q})}{\varepsilon} \le 1\right)$.

Тогда $\mathcal{J}_2(\tilde{t}_1, t_1, \varepsilon) \le t_1 - \tilde{t}_1 \le M_0\sqrt{\varepsilon}$.

Итого, имеем

$$|x_1| \le M_1\sqrt{\varepsilon}, t \,\epsilon\, \mathcal{D}_5 \tag{10}$$

На основе (8), (9), (10) имеем

$$|x_1| \le M_1 \begin{cases} 1, t \,\epsilon\, \mathcal{D}_1; \\ \varepsilon, t \,\epsilon\, \mathcal{D}_2; \\ \sqrt{\varepsilon}, t \,\epsilon\, \mathcal{D}_3 \cup \mathcal{D}_5. \end{cases} \tag{11}$$

Для рассматриваемого случая оценим последующие приближения. Применяя метод индукции и проведя соответствующие вычисления, получим оценку

$$|x_m| \le M_2 \begin{cases} 1, t \,\epsilon\, \mathcal{D}_1; \\ \varepsilon, t \,\epsilon\, \mathcal{D}_2; \\ \sqrt{\varepsilon}, t \,\epsilon\, \mathcal{D}_3 \cup \mathcal{D}_5, M_1 < M_2, \end{cases} \tag{12}$$

$m = 1, 2, \dots$.

Для доказательства сходимости последовательных приближений достаточно оценить $|x_m - x_{m-1}|$ [12].

Такие оценки проведены в [6, 7].

Справедлива оценка

$$|x_m - x_{m-1}| \le (M_3\varepsilon)^{m-1}, m = 2, 3, \dots, t \,\epsilon\, \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2 \cup \mathcal{D}_3 \cup \mathcal{D}_5. \tag{13}$$

Т. 10. №3. 2024
https://doi.org/10.33619/2414-2948/100

Из (13) вытекает равномерная сходимость $\{x_m\}$ к которой функции $x(t,\varepsilon)$, которая является решением (3). Если учесть (10), для этого решения справедлива оценка

$$|x(t,\varepsilon)| \le M_1 \begin{cases} 1, t \in \mathcal{D}_1; \\ \varepsilon, t \in \mathcal{D}_2; \\ \sqrt{\varepsilon}, t \in \mathcal{D}_3 \cup \mathcal{D}_5, \end{cases} \quad (14)$$

Если $x(t,\varepsilon)$ – решение (1)-(2) рассмотреть вдоль (K_1) от точки t_0 до $(0;\ -1)$, то согласно (14), в точке $(0;\ -1)$ для $x(t,\varepsilon)$ справедлива

$$|x(-i,\varepsilon)| = |x_1^0| \le M_1\sqrt{\varepsilon}. \quad (15)$$

Таким образом, с учетом (15), решение уравнения (1) можно представить в виде

$$x(t,\varepsilon) = x_1^0 exp\frac{F(t)}{\varepsilon} + \int_{-i}^{t}(1 + x^2(\tau,\varepsilon))\, exp\frac{F(t) - F(\tau)}{\varepsilon}d\tau \quad (16)$$

где $F(t) = 2\int_{-i}^{t}(\tau + i)d\tau = (t + i)^2$. (16) будем рассматривать для $t \in \mathcal{D}_4 \cup \mathcal{D}_6$.

Путь интегрирование состоит из части: (K_2) $[(0;\ -1), \tilde{t}]$, прямой

$(\mathcal{P}_2) = \{t_1 + t_2 + 1 - \tilde{q}_1 = 0,\ \sqrt{\varepsilon} \le \tilde{q}_1 \le 2\}$ $[\tilde{t}, t]$.

К (16) применим метод последовательных приближений, которые определим следующим образом

$$x_m = x_1^0 exp\frac{F_1(t)}{\varepsilon} + \int_{-i}^{t}(1 + x_{m-1}^2)\, exp\frac{F_1(t) - F_1(\tau)}{\varepsilon}d\tau, \quad (17)$$

$x_0 \equiv 0, m = 1, 2, \ldots.$

Как и в предыдущих случаях проведем оценку и докажем равномерную сходимость (17). Сначала (17) рассмотрим на границе (K_2) области $\mathcal{D}_5 \cup \mathcal{D}_6$.

Оценим первое приближение. Имеем

$$x_1 = x_1^0 exp\frac{F(t)}{\varepsilon} + \int_{\substack{-i \\ (K_2)}}^{\tilde{t}} exp\frac{F(\tilde{t}) - F(\tau)}{\varepsilon}d\tau, \quad (18)$$

В (18), к интегралу, который обозначим $\mathcal{J}_{12}(-i,\tilde{t},\varepsilon)$, применим метод стационарной фазы [10, 13].

$F(\tau) = -2it_1(t_2 + 1) = -2i(t_2 + 1)^2$.

Определим функцию $\varphi_1(\tau_2) = -2\tau_1^2$,

$\varphi_1(\tau_2)$ при $0 \le \tau_1 \le t_1^2$ в точке $\tau_1 = 0$ имеет стационарную точку и $\varphi_1''(\tau_1) = -4 < 0$.

Тогда

$$\int_{-i}^{\tilde{t}} exp\frac{F(t) - F(\tau)}{\varepsilon}d\tau = \int_{0}^{\tilde{t}_1} exp\frac{F(t) - 2i\tau_1^2}{\varepsilon}(1 + i)d\tau_1 =$$

$$= exp\frac{F_1(t)}{\varepsilon}\left\{(1 + i)\left\{\frac{\pi\varepsilon}{-8}\right\}^{\frac{1}{2}} exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right) + 0(\sqrt{\varepsilon})\right\}.$$

Таким образом $|\mathcal{J}_{12}(-i,\tilde{t},\varepsilon)| \le O(\sqrt{\varepsilon})$.

Если учесть $|x_1^0| = O(\sqrt{\varepsilon})$, то

$$|x_1| \le M_1\sqrt{\varepsilon}, t \in (K_2) \tag{19}$$

Для x_2 имеем $|x_2| \le |x_1| + O(1)\int_0^{\tilde{t}_1}|x_1|^2\, d\tau_1 \le M_1\sqrt{\varepsilon} + M_2\varepsilon = \sqrt{\varepsilon}(M_1 + M_2\sqrt{\varepsilon}) \le M_2\sqrt{\varepsilon}$, при условии $\sqrt{\varepsilon} \le \frac{M_2 - M_1}{M_2}$.

$|x_3| \le |x_1| + M_2^2 \le \sqrt{\varepsilon}M_2$,

если $\sqrt{\varepsilon} \le \frac{M_2 - M_1}{M_2^2}$.

Продолжая процесс, получим

$$|x_m| \le \sqrt{\varepsilon}M_2, \forall t \in (K_2), m = 1, 2, \ldots. \tag{20}$$

Далее проведем оценку $|x_m - x_{m-1}|$ $(m = 2, 3, \ldots)$.

$|x_2 - x_1| \le O(1)\int_0^{\tilde{t}_1}|x_1|^2\, d\tau_1 \le M_3\varepsilon$,

$|x_3 - x_2| \le O(1)\int_0^{\tilde{t}_1}|x_2 - x_1|\big||x_2| + |x_1|\big|\, d\tau_1 \le M_3\varepsilon \cdot 2M_2\sqrt{\varepsilon}$,

$|x_4 - x_3| \le O(1)\int_0^{\tilde{t}_1}|x_3 - x_2|\big||x_3| + |x_2|\big|\, d\tau_1 \le M_3\varepsilon \cdot \left(2M_2\sqrt{\varepsilon}\right)^2$.

Таким образом

$|x_m - x_{m-1}| \le M_3\varepsilon \cdot \left(2M_2\sqrt{\varepsilon}\right)^{m-2}, m = 2, 3, \ldots.$

Полученная оценка показывает равномерную сходимость $\{x_m\}$ $(\forall t \in (K_2))$, к некоторой функции $x(t,\varepsilon)$, которая является решением (16). Если учесть (20), то для этого решения справедлива оценка

$$|x(t,\varepsilon)| \le \sqrt{\varepsilon}M_2, t \in (K_2). \tag{21}$$

На основе оценки (21), уравнение (16) можем заменить на следующее

$$x(t,\varepsilon) = x_2^0 exp\frac{F(t) - F(\tilde{t}_0)}{\varepsilon} + \int_{\tilde{t}_0}^{t}(1 + x^2)\, exp\frac{F(t) - F(\tau)}{\varepsilon}d\tau \tag{22}$$

где $x(\tilde{t}_0,\varepsilon) = x_2^0$, принимает значения от точки $\tilde{t}_0\left(\frac{\sqrt{\varepsilon}}{2} + i\left(-1 + \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2}\right)\right)$ до $(1;0)$, $t \in \mathcal{D}_4 \cup \mathcal{D}_6$. (22) — уравнение с непрерывно меняющимся начальным условием. К (22) применим метод последовательных приближений, которые определяются как и в предыдущих случаях.

Сначала последовательные приближения оценим для $t \in \mathcal{D}_6$. В этом доминирующим является выражение $x_2^0 exp\frac{F(t) - F(\tilde{t}_0)}{\varepsilon}$ и получается оценка $|x_m| \le M_3\sqrt{\varepsilon}$, $t \in \mathcal{D}_6$.

Доказательство сходимости проводится как и в предыдущих случаях и справедлива оценка

$$|x(t,\varepsilon)| \le M_3\sqrt{\varepsilon}, t \in \mathcal{D}_6. \tag{23}$$

Пусть $t \in \mathcal{D}_4$. При оценке последовательных приближений, учтём, что $\left|x_2^0 exp\frac{F(t) - F(\tilde{t}_0)}{\varepsilon}\right| = |x_2^0| exp\frac{t_1^2 - (t_2 + 1)^2}{\varepsilon}$,

причем $t_1^2 - (t_2 + 1)^2 \le -\sqrt{\varepsilon}q$ и $0 < q$ – не зависит от ε.

Тогда $\left|x_2^0 exp\frac{F(t)-F(\tilde{t}_0)}{\varepsilon}\right| = O(\varepsilon^n), n \epsilon N.$

Для $x_m(t,\varepsilon)$ справедлива оценка $|x_m| \le M_3\varepsilon, t \epsilon \mathcal{D}_4$.

$\{x_m\}$ $(\forall t \epsilon \mathcal{D}_4)$ равномерно сходится к некоторой функции $x(t,\varepsilon)$, которая является решением (22) и справедлива оценка

$$|x(t,\varepsilon)| \le M_3\varepsilon, t \epsilon \mathcal{D}_4. \quad (24)$$

Учитывая (14), (23), (24) для решения задачи (1)-(2) получим оценку

$$|x(t,\varepsilon)| \le M \begin{cases} 1, t \epsilon \mathcal{D}_1; \\ \varepsilon, t \epsilon \mathcal{D}_2 \cup \mathcal{D}_4; \\ \sqrt{\varepsilon}, t \epsilon \mathcal{D}_3 \cup \mathcal{D}_5 \cup \mathcal{D}_6, \end{cases} \quad (25)$$

Полученный результат сформулируем в виде следующей теоремы

Теорема. Пусть рассматривается задача (1)-(2) для $t \epsilon \mathcal{D}$. Тогда существует область $\mathcal{D}_0 = \bigcup_{j=1}^{6} \mathcal{D}_j \subset \mathcal{D}$ и решение $x(t,\varepsilon)$ задачи (1)-(2), определенное в $\mathcal{D}_0$ и для этого решения справедлива оценка (25).

Заметим, что область $\mathcal{D}_0$ содержит отрезок $[t_0; 1]$ действительной оси и функция $Re(t+i) = t$, на этом отрезке, меняет свой знак с отрицательного на положительное.

Решение $x(t,\varepsilon) \to 0$ $(\forall\, t \,\epsilon [t_0; 1]$ по $\varepsilon)$.

Заключение

В данной работе, на одном примере сингулярно возмущенных уравнений, показано какие методы применяются для исследования асимптотического поведения сингулярно возмущенных уравнений. Совокупность методов можно разделить на следующие составляющие:

М 1. Геометрические построения и выбор путей интегрирования, основанные на свойствах гармонических функций.

М 2. Модифицированный метод последовательных приближений, который включает в себе последовательную замену начальных условий на непрерывно меняющихся начальных условий.

М 3. Методы: Лапласа и стационарной фазы, асимптотической оценки интегралов содержащих большой, положительный параметр; Вейерштрасса, построение мажорантных рядов, для доказательства сходимости функциональных рядов; индукции; интегрирование по частям.

М 1. близок к топологическим методам, а М 2 и М 3- аналитические.

Список литературы:

1. Понтрягин Л. С. Асимптотическое поведение решений систем дифференциальных уравнений с малым параметром при высших производных // Известия Российской академии наук. Серия математическая. 1957. Т. 21. №5. С. 605-626.

2. Тихонов А. Н. Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных // Математический сборник. 1952. Т. 31. №3. С. 575-586.

3. Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х. Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания. М.: Наука, 1975. 247 с.

4. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973. 272 с.

5. Иманалиев М. И. Асимптотические методы в теории сингулярно-возмущенных интегро-дифференциальных систем. Фрунзе: Илим, 1972. 356 с.

6. Алыбаев К. С. Метод линий уровня исследования сингулярно возмущенных уравнений при нарушении условия устойчивости // Вестник КГНУ. 2001. Т. 3. С. 190-200.

7. Турсунов Д. А. Асимптотика решения задачи Коши при нарушении устойчивости точки покоя в плоскости «быстрых движений» // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2018. №54. С. 46-57. https://doi.org/10.17223/19988621/54/4

8. Алыбаев К., Мусакулова Н. Метод линий уровня в теории сингулярно возмущенных уравнений // Вестник Ошского государственного университета. 2022. №4. С. 206-217. https://doi.org/10.52754/16947452_2022_4_206

9. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Лань, 2002. 688 с.

10. Федорюк М. В. Метод перевала. М.: Наука, 1977. 368 с.

11. Вазов В. Р. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1968. 464 с.

12. Привалов И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного. М.: Наука, 1977. 444 с.

13. Копсон Э. Т. Асимптотические разложения. М.: Мир, 1966. 159 с.

14. Брейн Н. Г. Асимптотические методы в анализе. М.: Изд-во иностр. лит., 1961. 247 с.

References:

1. Pontryagin, L. S. (1957). Asimptoticheskoe povedenie reshenii sistem differentsial'nykh uravnenii s malym parametrom pri vysshikh proizvodnykh. *Izvestiya Rossiiskoi akademii nauk. Seriya matematicheskaya, 21*(5), 605-626. (in Russian).

2. Tikhonov, A. N. (1952). Sistemy differentsial'nykh uravnenii, soderzhashchie malye parametry pri proizvodnykh. *Matematicheskii sbornik, 31*(3), 575-586. (in Russian).

3. Mishchenko, E. F., & Rozov, N. Kh. (1975). Differentsial'nye uravneniya s malym parametrom i relaksatsionnye kolebaniya. Moscow. (in Russian).

4. Vasil'eva, A. B., & Butuzov, V. F. (1973). Asimptoticheskie razlozheniya reshenii singulyarno vozmushchennykh uravnenii. Moscow. (in Russian).

5. Imanaliev, M. I. (1972). Asimptoticheskie metody v teorii singulyarno-vozmushchennykh integro-differentsial'nykh sistem. Frunze. (in Russian).

6. Alybaev, K. S. (2001). Metod linii urovnya issledovaniya singulyarno vozmushchennykh uravnenii pri narushenii usloviya ustoichivosti. *Vestnik KGNU, 3*, 190-200. (in Russian).

7. Tursunov, D. A. (2018). Asimptotika resheniya zadachi Koshi pri narushenii ustoichivosti tochki pokoya v ploskosti "bystrykh dvizhenii". *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika,* (54), 46-57. (in Russian). https://doi.org/10.17223/19988621/54/4

8. Alybaev, K., & Musakulova, N. (2022). Metod linii urovnya v teorii singulyarno vozmushchennykh uravnenii. *Vestnik Oshskogo gosudarstvennogo universiteta,* (4), 206-217. (in Russian). https://doi.org/10.52754/16947452_2022_4_206

9. Lavrent'ev, M. A., & Shabat, B. V. (2002). Metody teorii funktsii kompleksnogo peremennogo. Moscow. (in Russian).

10. Fedoryuk, M. V. (1977). Metod perevala. Moscow. (in Russian).

11. Vazov, V. R. (1968). Asimptoticheskie razlozheniya reshenii obyknovennykh differentsial'nykh uravnenii. Moscow. (in Russian).

12. Privalov, I. I. (1977). Vvedenie v teoriyu funktsii kompleksnogo peremennogo. Moscow. (in Russian).

13. Kopson, E. T. (1966). Asimptoticheskie razlozheniya. Moscow. (in Russian).

14. Brein, N. G. (1961). Asimptoticheskie metody v analize. Moscow. (in Russian).

Работа поступила в редакцию 07.02.2024 г.

Принята к публикации 16.02.2024 г.

Ссылка для цитирования:

Алыбаев К. С., Нурматова М. Н., Мусакулова Н. К. Методы исследования асимптотики решений сингулярно возмущенных уравнений в комплексных областях // Бюллетень науки и практики. 2024. Т. 10. №3. С. 14-27. https://doi.org/10.33619/2414-2948/100/01

Cite as (APA):

Alybaev, K., Nurmatova, M., & Musakulova, N. (2024). Methods for Studying Asymptotics of Solutions to Singularly Perturbed Equations in Complex Domains. *Bulletin of Science and Practice, 10*(3), 14-27. (in Russian). https://doi.org/10.33619/2414-2948/100/01